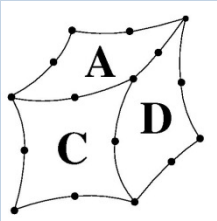


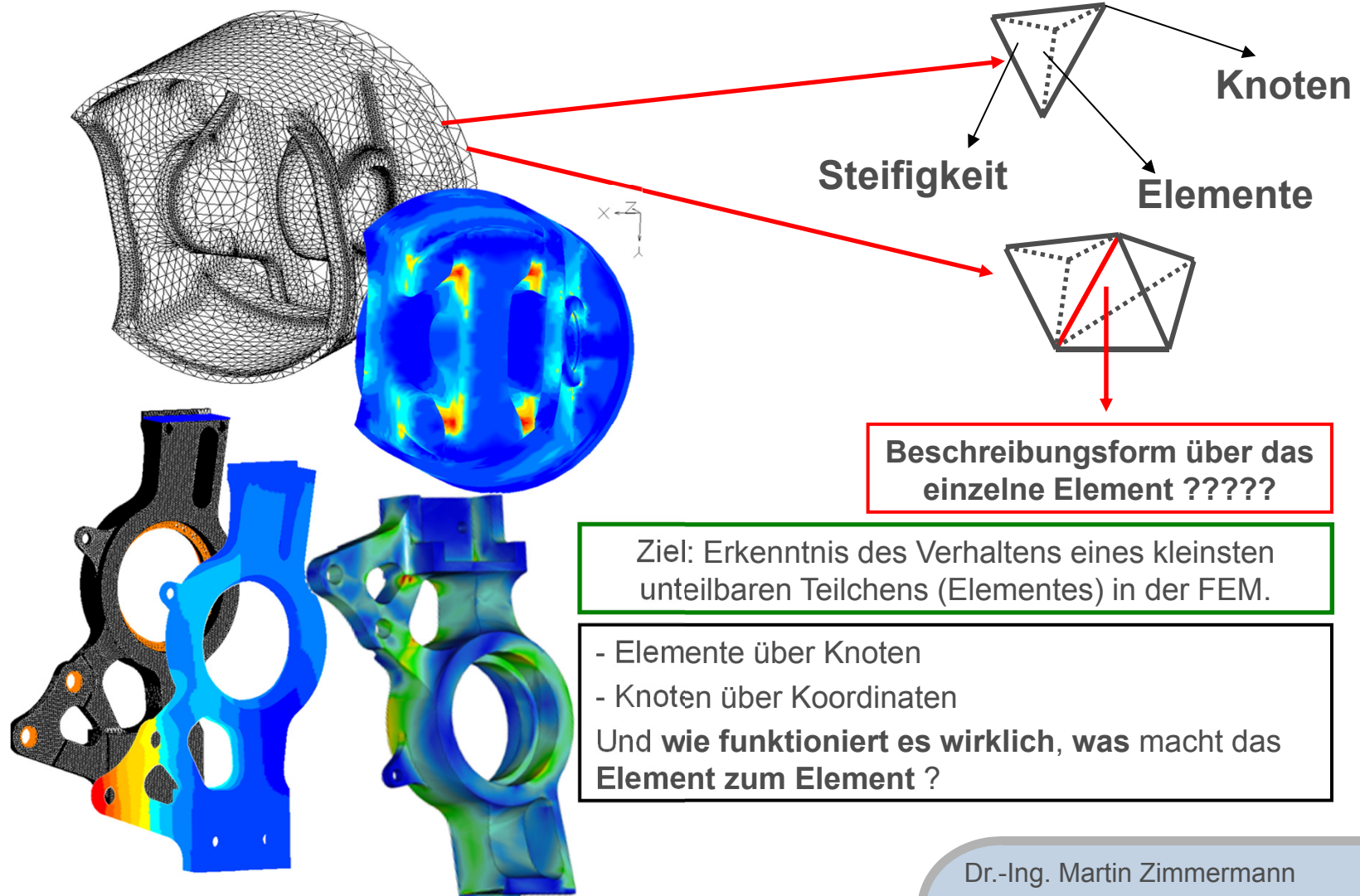
UNIVERSITÄT
BAYREUTH

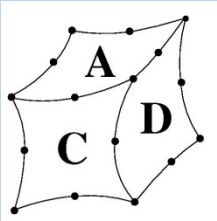
Formfunktionen (Interpolation): Bedeutung und praktischer Einsatz

Dr.-Ing. Martin Zimmermann
Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD
Universität Bayreuth



Einleitung, Problem und Motivation

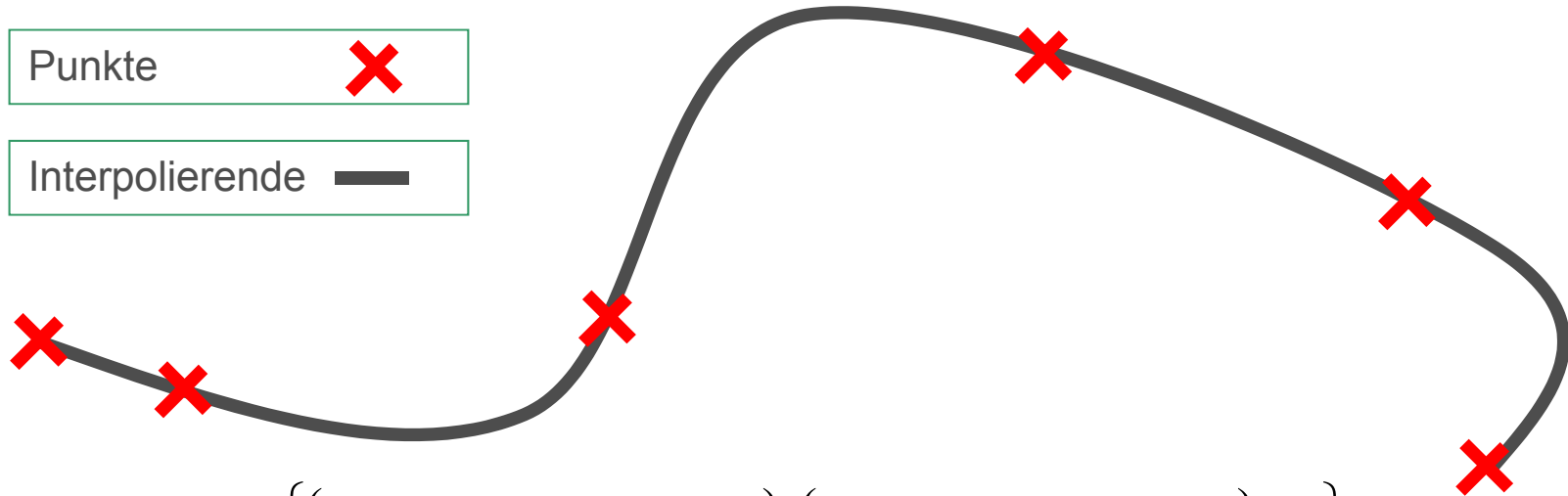




Interpolation allgemein

Punkte 

Interpolierende 



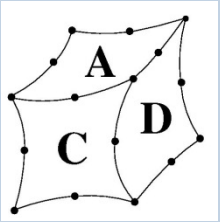
$$A = \left\{ \begin{array}{l} (x_{00}; x_{10}; \dots; x_{i0}; \dots; x_{k0}); (x_{01}; x_{11}; \dots; x_{i1}; \dots; x_{k1}); \dots; \\ (x_{0j}; x_{1j}; \dots; x_{ij}; \dots; x_{kj}); \dots; (x_{0l}; x_{1l}; \dots; x_{il}; \dots; x_{kl}) \end{array} \right\}$$

$i \in \{0 \dots k\}$ Dimension

$j \in \{0 \dots l\}$ Anzahl Punkte

Aufgabe: Interpolation von $(l+1)$ -Punkten des $(k+1)$ -dimensionalen Raumes

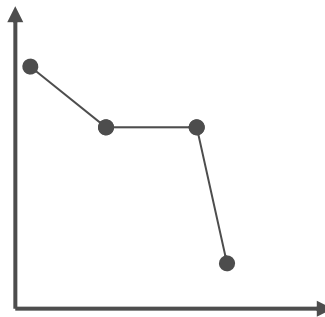
Als **Interpolation** kann die **Erfassung** einer **Anzahl Punkte** durch eine **analytisch beschreibbare Kurve** definiert werden, die **deckungsgleich auf diesen Punkten** liegt und die damit die **Punkte abbildet oder repräsentiert**.



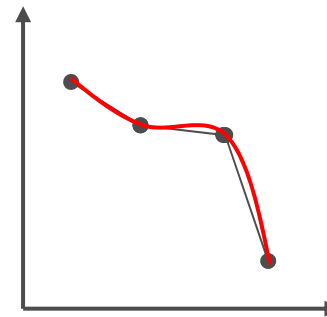
Interpolationsmethoden

nach Wirkung:

Stückweise (linear)



Geschlossen (kubisch)

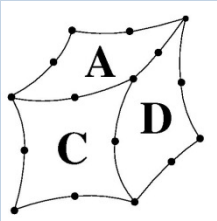


nach Funktion:

- Polynominterpolation: Ansatz über Polynome wählen
- kubische Spline-Interpolation: spezielle Form für Polynome, Randbedingungen, lässt sich eindeutig ab zwei Punkten bilden
- logarithmische Interpolation: Bestimmung der Parameter einer logarithmischen Funktion (funktioniert nur stückweise zwischen zwei Punkten)

nach mathematischem Problem:

- linear
- nichtlinear

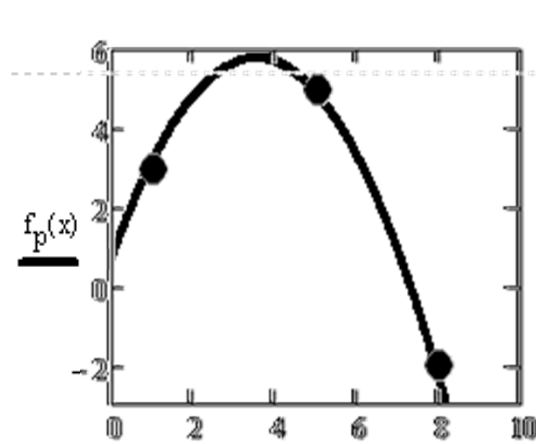


Polynominterpolation

Quadratische Polynomfunktion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f_p(x) := \sum_{c=0}^{\text{zeilen}(q)-1} \left[x^{(\text{zeilen}(q)-1-c)} \cdot q_c \right] \quad q = \begin{pmatrix} -0.405 \\ 2.929 \\ 0.476 \end{pmatrix}$$



Potenzen der Argumente (Argumentmatrix)

Potenzen

$$h := 0..2$$

Argumentnummer

$$i := 0..2$$

$$c_{i,h} := (P_{0,i})^{2-h}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

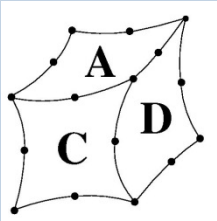
Aufstellen des Ergebnisvektors

$$r_i := P_{1,i}$$

$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten bestimmen

$$q := c^{-1} \cdot r$$



Kubische Spline-Interpolation 1

kubische Spline-Interpolation

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y_{ab1} = 3 \cdot ax^2 + 2 \cdot bx + c$$

$$y_{ab12} = 6 \cdot ax + 2 \cdot b$$

1. kubischer Spline

1. Abschnitt

$$\begin{pmatrix} P_{1,0} \\ P_{1,1} \\ PA_{2,1} \\ PA2_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{0,0})^3 & (P_{0,0})^2 & (P_{0,0}) & 1 \\ (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 \\ 3 \cdot (P_{0,1})^2 & 2 \cdot (P_{0,1}) & 1 & 0 \\ 6 \cdot (P_{0,1}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Randbedingungen: hier freier Rand

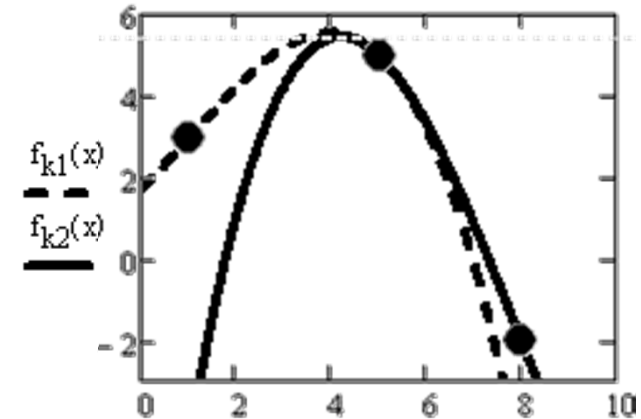
$$0 = \begin{bmatrix} 6 \cdot (P_{0,0}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

2. Abschnitt

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ PA_{1,1} \\ PA2_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 \\ (P_{0,2})^3 & (P_{0,2})^2 & (P_{0,2}) & 1 \\ 3 \cdot (P_{0,1})^2 & 2 \cdot (P_{0,1}) & 1 & 0 \\ 6 \cdot (P_{0,1}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Randbedingungen: hier freier Rand

$$0 = \begin{bmatrix} 6 \cdot (P_{0,2}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

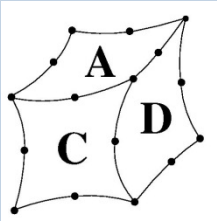


Quelle: Rieg (Vorlesung:
Ingenieurmathematische
Anwendungen)

Kubische Spline-Interpolation

Gegeben sei eine auf $[a, b]$ definierte Funktion f und eine Menge von Knoten $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Eine kubische Spline-Interpolierende S von f ist eine Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

- S ist ein kubisches Polynom, bezeichnet mit S_j , auf dem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ für jedes $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- $S(x_j) = f(x_j)$ für jedes $j = 0, 1, \dots, n$.
- $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ für jedes $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ für jedes $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ für jedes $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- Eine der folgenden Randbedingungen ist erfüllt:
 - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (natürlicher oder freier Rand);
 - $S'(x_0) = f'(x_0)$ und $S'(x_n) = f'(x_n)$ (Hermite-Rand).



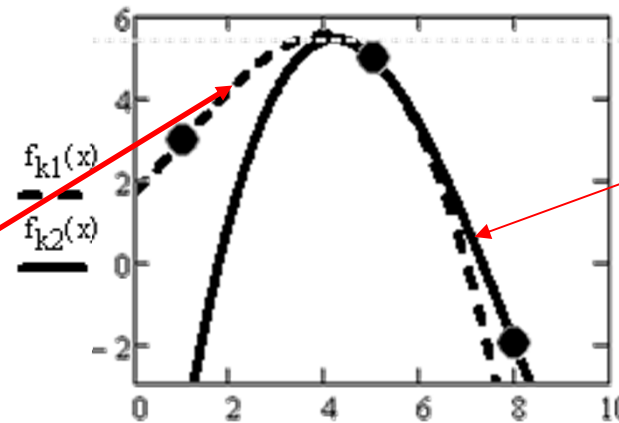
Kubische Spline-Interpolation 2

$$r2 := \begin{pmatrix} P_{1,0} \\ P_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c2 := \begin{bmatrix} (P_{0,0})^3 & (P_{0,0})^2 & (P_{0,0}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot (P_{0,1})^2 & 2 \cdot (P_{0,1}) & 1 & 0 & -[3 \cdot (P_{0,1})^2] & -[2 \cdot (P_{0,1})] & -1 & 0 \\ 6 \cdot (P_{0,1}) & 2 & 0 & 0 & -[6 \cdot (P_{0,1})] & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (P_{0,2})^3 & (P_{0,2})^2 & (P_{0,2}) & 1 \\ 6 \cdot (P_{0,0}) & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot (P_{0,2}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

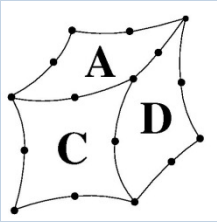
$$\begin{pmatrix} P_{1,0} \\ P_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{0,0})^3 & (P_{0,0})^2 & (P_{0,0}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot (P_{0,1})^2 & 2 \cdot (P_{0,1}) & 1 & 0 & -[3 \cdot (P_{0,1})^2] & -[2 \cdot (P_{0,1})] & -1 & 0 \\ 6 \cdot (P_{0,1}) & 2 & 0 & 0 & -[6 \cdot (P_{0,1})] & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (P_{0,1})^3 & (P_{0,1})^2 & (P_{0,1}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (P_{0,2})^3 & (P_{0,2})^2 & (P_{0,2}) & 1 \\ 6 \cdot (P_{0,0}) & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot (P_{0,2}) & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$q2 := c2^{-1} \cdot r2 \quad q2 = \begin{pmatrix} -0.051 \\ 0.152 \\ 1.158 \\ 1.741 \\ 0.067 \\ -1.619 \\ 10.012 \\ -13.016 \end{pmatrix}$$

kubische Funktion 1

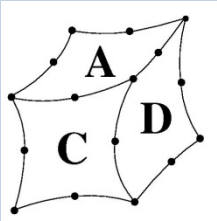


kubische Funktion 2



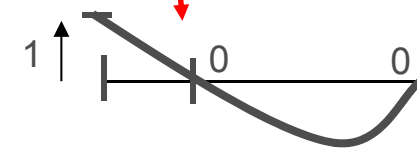
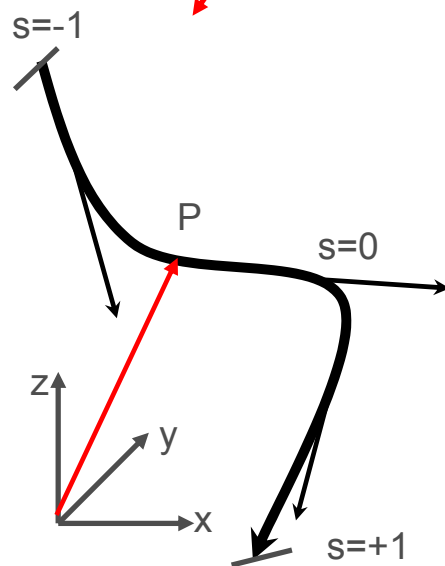
Vergleich der Interpolationen

- kubische Spline-Interpolation ist:
 - für beliebig viele Punkte (Stützstellen) geeignet und daher sehr flexibel
 - kubische Spline-Interpolation ist über die Knoten hinweg stetig in der Funktion, der ersten Ableitung, der zweiten Ableitung
 - aber: komplexe Berechnung
- allg. Polynominterpolation:
 - Grad richtet sich nach Anzahl zu interpolierender Punkte
 - **wird für FE-Rechnung verwendet**



Lagrange-Polynome 1

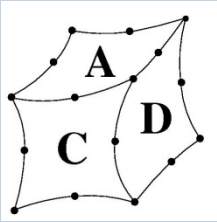
- spezielle Klasse an Polynomen
- relevant für FE-Rechnung da:
 - für ein natürliches Koordinatensystem genormt,
 - hinsichtlich der Funktionswerte an einer zugehörigen Stützstelle auf 1 genormt,
 - für ein isoparametrisches Elementkonzept verwendungsfähig.



$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \underline{f}(s(P))$$

isoparametrisches Elementkonzept:

Für die Forminterpolation eines Elementes werden die gleichen Interpolationsfunktionen, wie für die Verschiebungsinterpolation angesetzt. Diese sind durch eine Anzahl Parameter (Knotenkoordinaten) bestimmt.



Lagrange-Polynome 2

Für eine Formfunktion, die entlang einer gegebenen natürlichen Koordinate mit i Knoten verlaufen soll gilt:

Die allgemeinen Regeln für Formfunktionen [entnommen aus Rieg].

- jeder Knoten i besitzt genau eine ihm zugehörige Formfunktion N_i
- die Formfunktion ist in dem ihr zugehörigen Knoten EINS, in allen anderen NULL

Hinweis 1:

Da eine allgemeine Polynominterpolation Anwendung finden muss gilt:

Der Polynomgrad wird durch die Anzahl Knoten längs einer Koordinate bestimmt (2 Knoten heißt -> linearer Ansatz, 3 Knoten heißt -> quadratischer Ansatz ...).

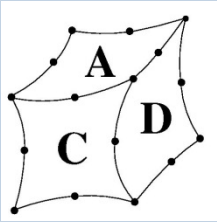
Für ein Polynom n -ten Grades gilt mit den n reellen Nullstellen x_i die Regel:

kubisches
Polynom

$$y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$
$$y(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

allgemein:

$$y(x) = \prod_n (x - x_i)$$



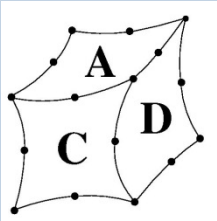
Lagrange-Polynome 3

Für die in der FEM angewendeten Lagrange-Polynome gilt weiterhin, dass die Stützstellen (auch Null- oder Einstellen) im Intervall der natürlichen Koordinate x zwischen $[-1;1]$ liegen und gleichverteilt hinsichtlich der natürlichen Koordinate sind.

Damit die Forderung erfüllt wird, dass die Funktion in dem ihr zugehörigen Knoten u EINS wird, muss der Polynomterm um den Betrag des Polynoms an der Stelle x_u mit $i=1..n$ normiert werden:

Nach einer derartigen Vorschrift gebildete Polynome werden Lagrange-Polynome bezeichnet.

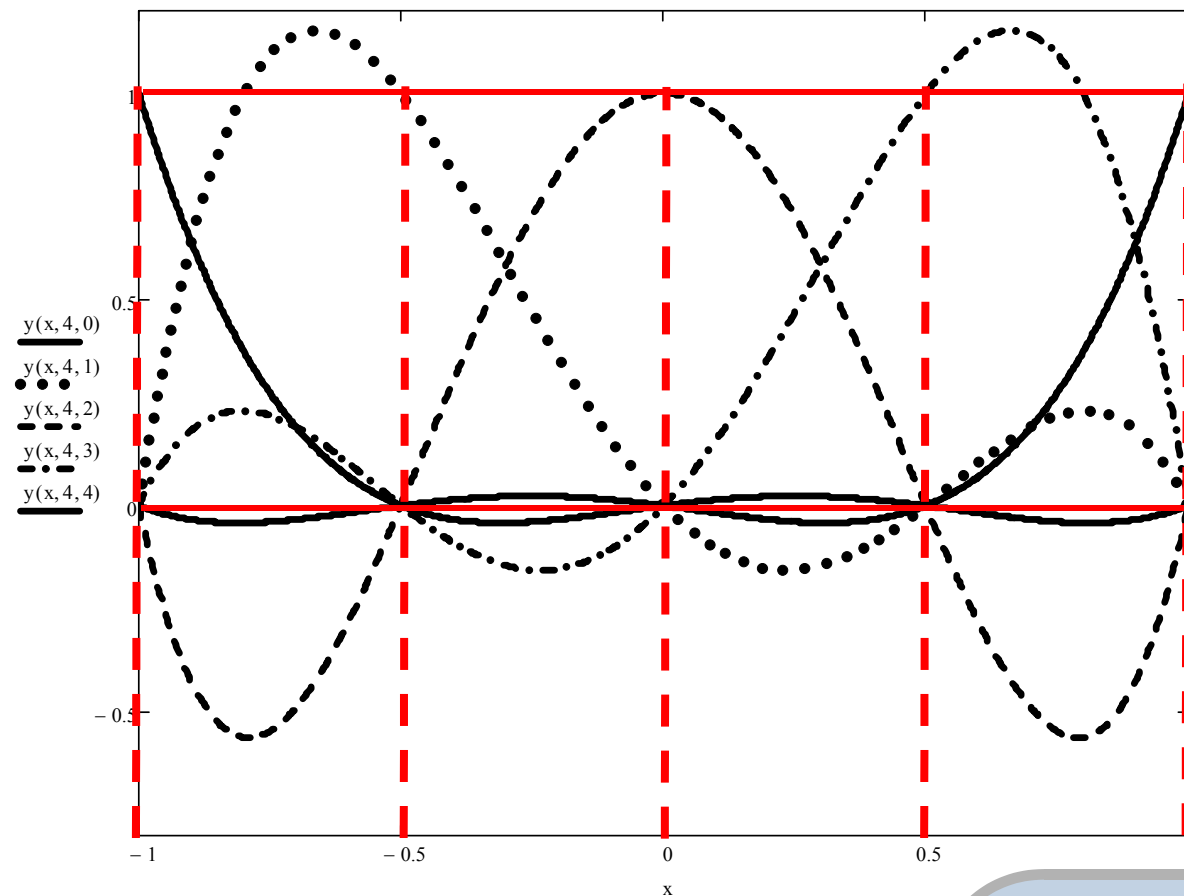
$$y(x) = \frac{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}{\prod_{i=1}^n (x_u - x_i)}$$

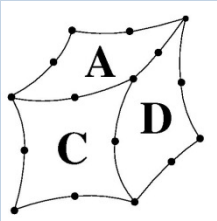


Beispiel eindimensionale Lagrange-Interpolation



Für das Lagrange-Polynom 4. Ordnung ergibt sich der unten dargestellte Verlauf.

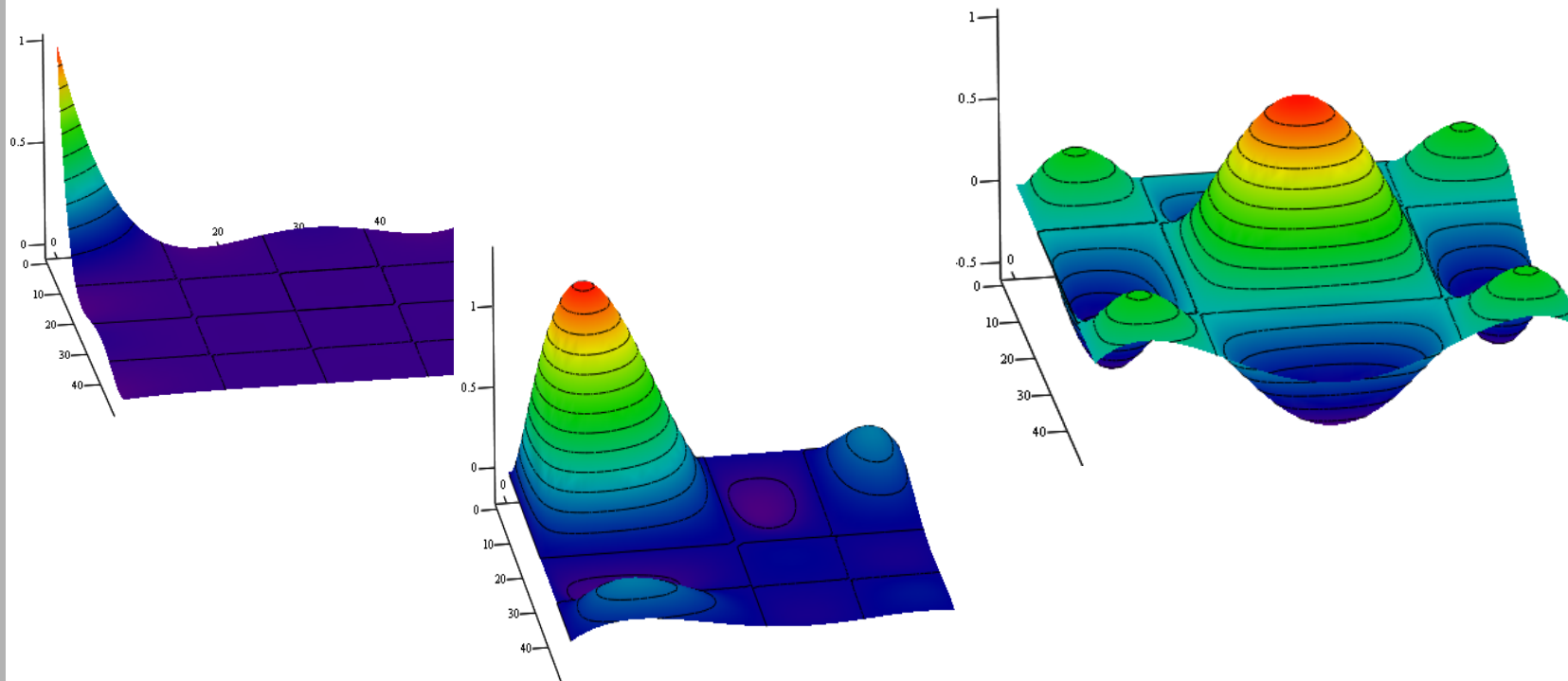




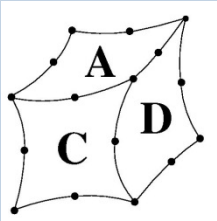
Mehrdimensionale Interpolation mit Lagrange-Funktionen



Für flächige Formfunktionen ergeben sich Polynome durch einfache Multiplikation der einzelnen Formfunktionen.



Für die ebenen Lagrange-Polynome 4. Ordnung ergibt sich der oben dargestellte Verlauf für drei verschiedenen Knoten.



Ebene Koordinateninterpolation (Schema)



Formfunktionen für Scheibe mit quadratischem Ansatz

Werte für Punkte oben:

- 1 = 1
- 2 = 0
- 3 = 0
- 4 = 0
- 5 = 0

- 1 = 0
- 2 = 1
- 3 = 0
- 4 = 0
- 5 = 0

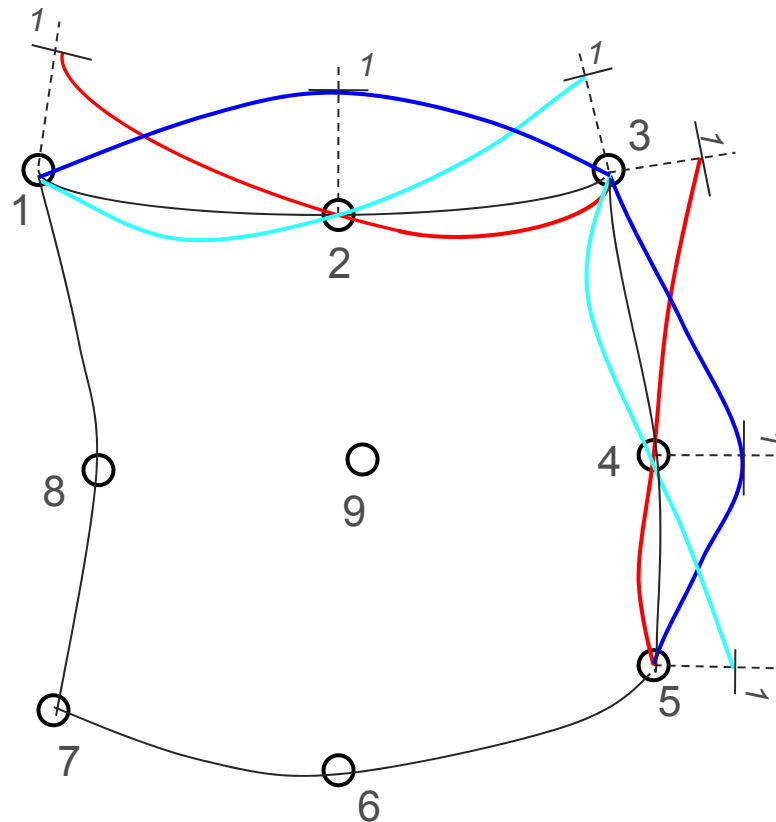
- 1 = 0
- 2 = 0
- 3 = 1
- 4 = 0
- 5 = 0

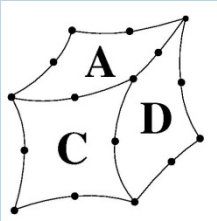
Werte für Punkte rechts:

- 1 = 0
- 2 = 0
- 3 = 0
- 4 = 0
- 5 = 1

- 1 = 0
- 2 = 0
- 3 = 0
- 4 = 1
- 5 = 0

- 1 = 0
- 2 = 0
- 3 = 1
- 4 = 0
- 5 = 0



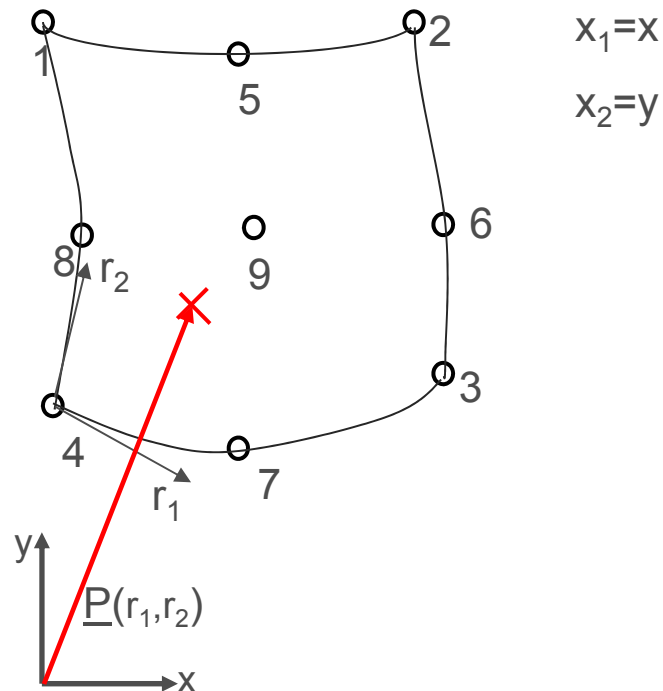


Ebene Koordinateninterpolation



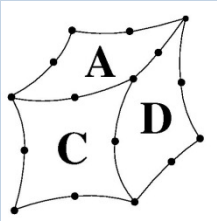
Die Interpolationsfunktionen werden nun genutzt um **Geometrie** und **Verschiebungen** im Rahmen des isoparametrischen Elementansatzes zu interpolieren. Dazu soll ein quadratischer Flächenansatz betrachtet werden.

Es gilt die Koordinateninterpolationsvorschrift:



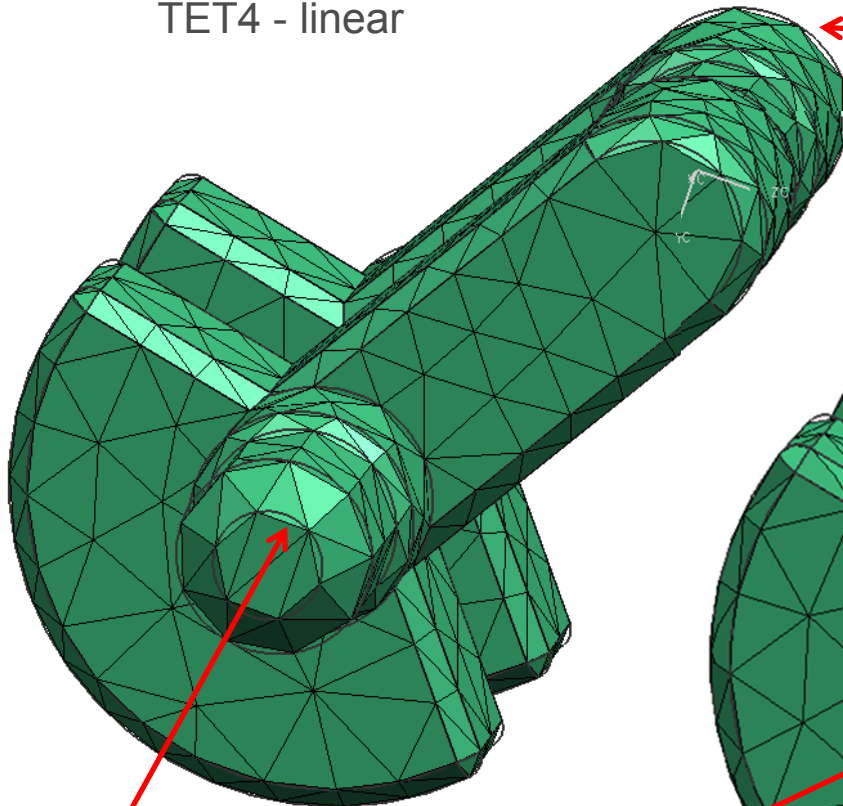
$$x_i = \sum_{k=1}^n h(r_1, \dots, r_t)^k \cdot x_i$$

$$u_i = \sum_{k=1}^n h(r_1, \dots, r_t)^k \cdot u_i$$

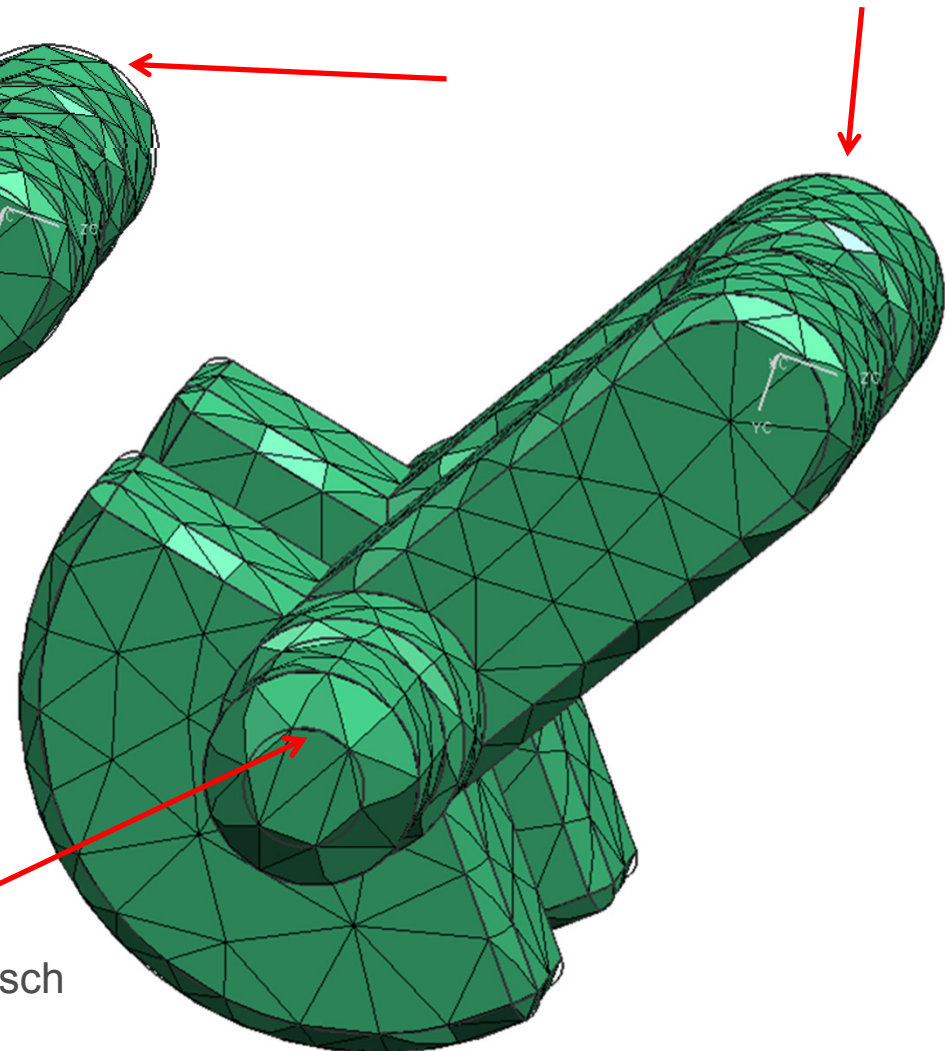


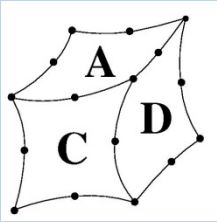
Bedeutung des Ansatzgrades

TET4 - linear



TET10 - quadratisch





Verschiebungen

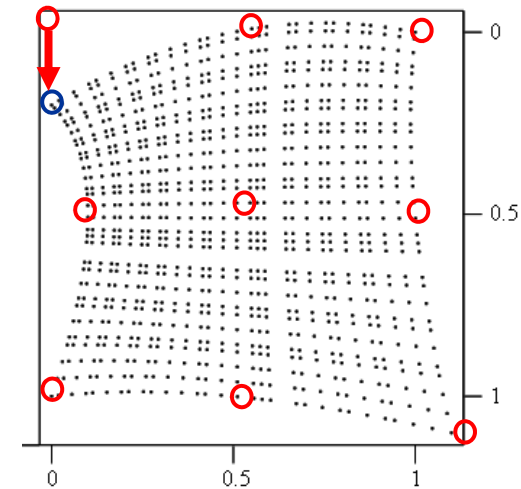
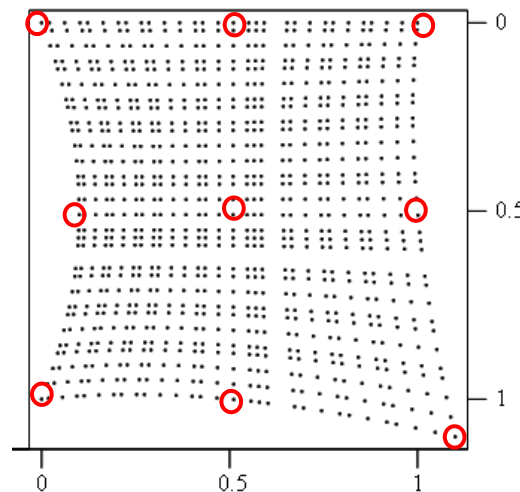
Verschiebungen bei isoparametrischem Elementkonzept

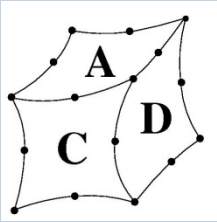
Nr. x y

E := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1.1 & 1.1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0.5 & 0.1 \\ 6 & 1 & 0.5 \\ 7 & 0.5 & 1 \\ 8 & 0 & 0.5 \\ 9 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

E := $\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1.1 & 1.1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0.5 & 0.1 \\ 6 & 1 & 0.5 \\ 7 & 0.5 & 1 \\ 8 & 0 & 0.5 \\ 9 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

Punktewolke über die natürlichen Koordinaten

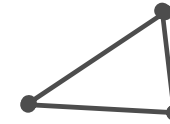




Relevanz der Formfunktionen 1

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u(r_1, r_2) \\ v(r_1, r_2) \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}}$$

Am Beispiel der Verzerrungen –
ebener Verzerrungszustand
(dreieckige Scheibe)



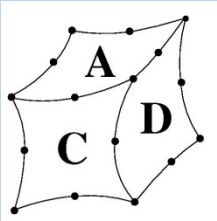
$$\begin{Bmatrix} u(r_1, r_2) \\ v(r_1, r_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$N(x,y)=$
Formfunktionen (lineare Scheibe)

$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{U}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}$$



Relevanz der Formfunktionen 2

$$\delta \underline{W}_i = \iiint_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV$$



$$\iiint_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV \cdot \underline{U} = \underline{F}$$

Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K}

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}$$

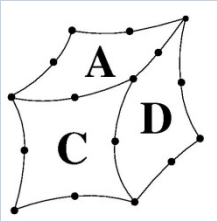


$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{U}$$

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{U}$$



Notwendigkeit der numerischen Integration über die Formfunktionen zum Erhalt der Steifigkeitsmatrix.

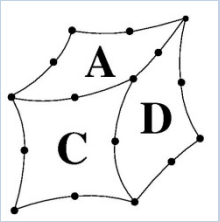


Integration (von Polynomen)

Gauss-Quadratur:

- Ermöglicht die Integration einer Funktion $F(r)$ numerisch mit Fehlern!
- meist (auch hier) normiert auf natürliches Intervall für r $[-1,1]$
- Es werden Stützpunkte und zu diesen Punkten Gewichtungsfaktoren herangezogen.
- **Besonderheit:**
 - Bei dieser Art der Integration wird bei n Stützstellen an Stelle der Funktion $F(r)$ ein zu $F(r)$ gut passendes Polynom vom Grad $2n-1$ integriert [K.J. Bathe, 1990].
 - D.h.: Liegt ein Polynom vom Grad $2n-1$ vor, so wird dieses exakt integriert.
 - Gezeigt wurde, dass die Größen über einem Element durch Polynome repräsentiert werden.
 - daher Verwandtschaft zur FEM
- Unverzerrte reguläre rechteckige, hexaedrische Elemente lassen sich zumindest im Rahmen der linearen FEM recht gut mit einer annehmbaren Integrationsordnung integrieren. (Bsp.: quadratischer Hexaeder: 3-5)

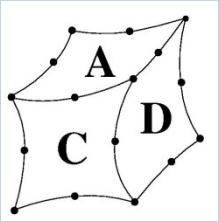
$$\int F(r)dr = \sum_g F(r_g) \cdot \alpha_g$$



Zusammenfassung



- Formfunktionen sind in der FEA Polynome.
- Es gibt Form- und Verschiebungsinterpolationsfunktionen – beide sind gleich bei der Anwendung eines isoparametrischen Elementkonzeptes.
- Eine Strategie zur Interpolation von Elementen (das Innere der Elemente) wurde aufgezeigt.
- Damit und mit einem Ausblick auf die Integrationsroutinen ist der Grundstein für die Elementableitung / Elemententwicklung gelegt.



Literatur



- [1] Klaus-Jürgen Bathe: *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin: Springer; 2000
 - [2] Josef Betten: *Finite Elemente für Ingenieure 1,2*. Berlin: Springer; 1997
 - [3] Dietrich Braess: *Finite Elemente*. Berlin: Springer; 1997
 - [4] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor: *The Finite Element Method*. Vol. 1,2. Oxford: Butterworth Heinemann; 2002
-