Elementsteifigkeitsmatrizen I

Das Kontinuum wird durch gedachte Linien oder Flächen in kleinere Kontinua in an sich beliebiger Form zerlegt.

Für jedes dieser kleinen „Sub“- Kontinua, die sog. finiten Elemente, werden Näherungsansätze getroffen.

Die Elemente selbst sind jeweils durch eine Anzahl Knoten definiert, und die Elemente sind durch die Knoten, die sich an den Elementrändern befinden, miteinander verbunden.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte sind die grundlegenden Unbekannten des Gesamtproblems.

Die Verschiebungen innerhalb von jedem finiten Element werden durch (willkürlich) gewählte Funktionen – die sog. Ansatz- bzw. Formfunktionen – in Abhängigkeit der Knotenpunktverschiebungen angenähert.

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen II

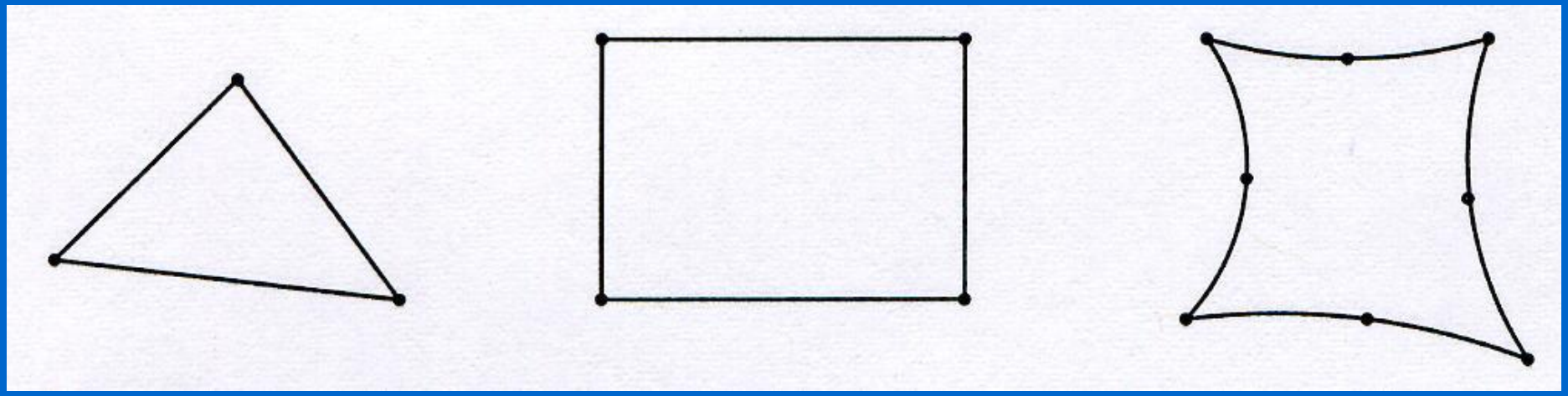
Da die Verschiebungen jetzt im Element bekannt sind, werden aufgrund der Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen auch die Verzerrungen im Element bekannt, und zwar in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen.

Aus den Verzerrungen können mit Hilfe der Materialgesetze die Spannungen im Element berechnet werden.

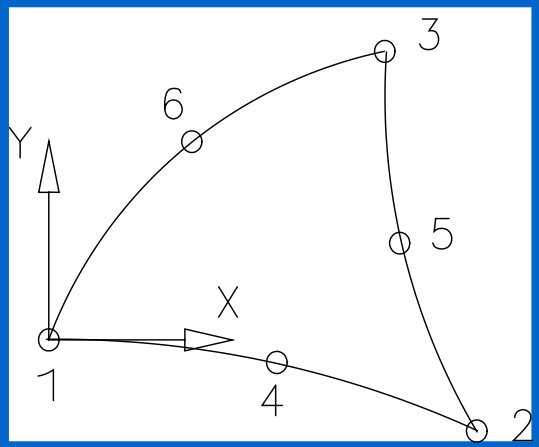
Linienlasten, Gleichstreckenlasten, Flächenlasten und Volumenkräfte werden durch diskrete Knotenkräfte abgebildet, die eine Ersatzbelastung darstellen.

UNIVERSITÄT BAYREUTH

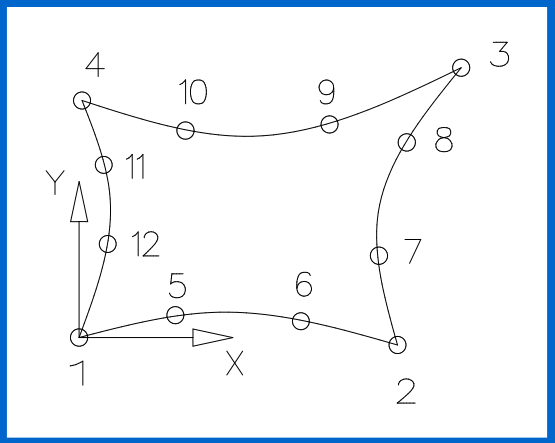
Elementsteifigkeitsmatrizen III



Z88-Element Nr.6 n/a Z88-Ele. Nr.7,8 u. 20



Z88-Ele. Nr.14,15 u. 18



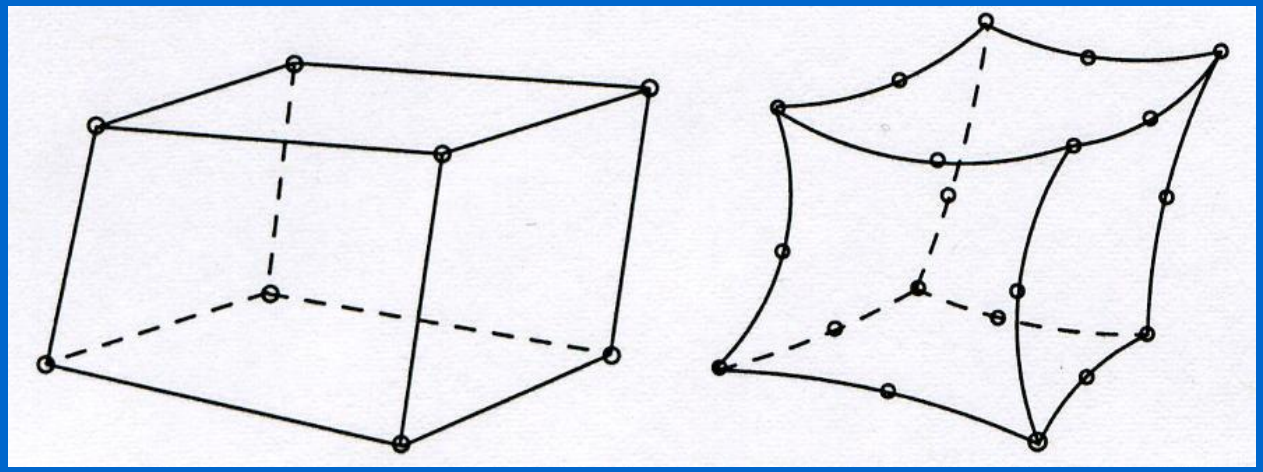
Z88-Ele. Nr.11 und 12

Scheiben
Platten
axialsym. Elemente = Torus-E.

$$\boldsymbol{K}^{e} = \iint_{A} \boldsymbol{B}^{T}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B}\, dS$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

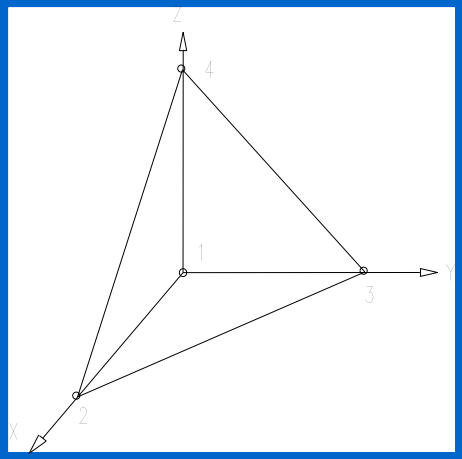
Elementsteifigkeitsmatrizen IV



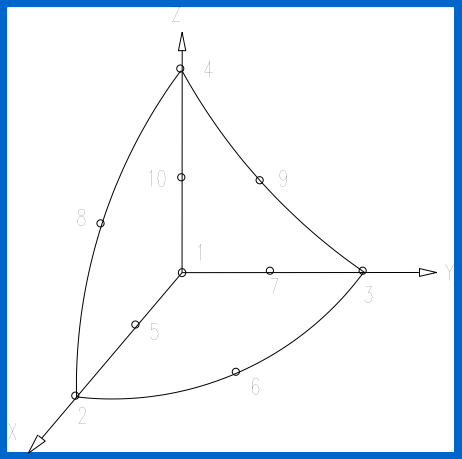
Z88-Element Nr. 1

Z88-Element Nr.10

C MaterialmatrixMatrix
B Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix



Z88-Element Nr.17



Z88-Element Nr.16

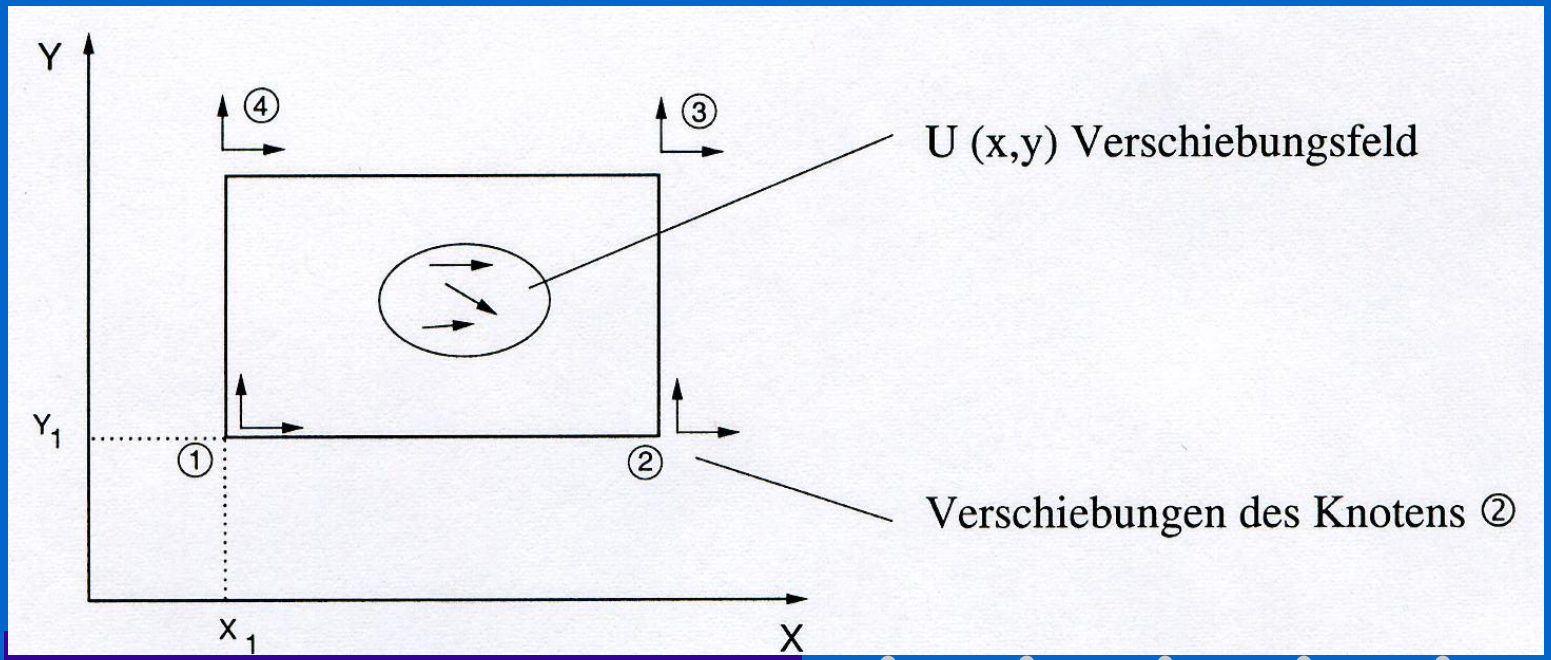
$$\boldsymbol{K}^{e} = \iiint_{V} \boldsymbol{B}^{T}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

Elementsteifigkeitsmatrizen V

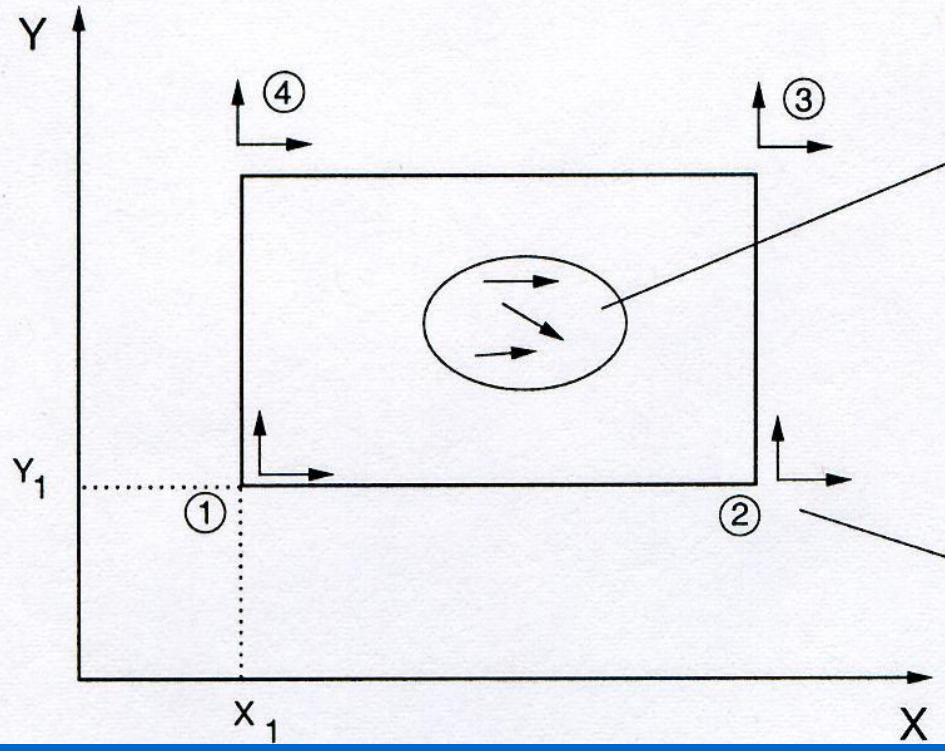
Die Elemente sind jeweils durch eine Anzahl Knoten definiert.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte sind die grundlegenden Unbekannten des Gesamtproblems.

Die Verschiebungen innerhalb von jedem finiten Element werden durch (willkürlich) gewählte Funktionen – die sog. Ansatz- bzw. Formfunktionen – in Abhängigkeit der Knotenpunktverschiebungen angenähert.



Elementsteifigkeitsmatrizen VI



U (x,y) Verschiebungsfeld

$$\boldsymbol{K}^{e} = \iint_{A} \boldsymbol{B}^{T}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B}\, dS$$

Verschiebungen des Knotens ②

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \sum_{i} \boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{N}_i(x,y)$$

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen VII

Wir müssen die Verzerrungen durch die Verschiebungen ausdrücken. Aber das ist leicht, denn wir wissen:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = LU}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen VIII

Wir nehmen einmal an, daß unser herzuleitendes Finites Element 4 Knoten habe. Es gibt also 4 Funktion N_1 bis N_4 und es muß gelten:

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \sum_i \boldsymbol{U}_i \cdot \boldsymbol{N}_i(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 \\ N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen IX

$$\begin{pmatrix} N_1,0,N_2,0,N_3,0,N_4,0 \\ 0,N_1,0,N_2,0,N_3,0,N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen X

$$\varepsilon_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ \hline 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{U}_{(i)} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}_{(i)} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen XI

für das Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix:
Prinzip der virtuellen Verrückungen

virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{U}$

virtuellen Verzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$

es muß gelten: *Virtuelle innere Arbeit = vituelle äußere Arbeit*

$$\delta W_i = \delta W_a$$

Dabei ist die innere Arbeit die gespeicherte potentielle Energie, und die äußere Arbeit wird durch die äußeren Kräfte geleistet.

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen XII

$$\delta W_a = \iiint_V \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{P}\, dV + \delta \boldsymbol{U}_{(i)}^T \boldsymbol{F}_{(i)}$$

mit ***P***= Volumenkräfte
und $\boldsymbol{F}_{(i)}$ äußere Knotenkräfte

$$\delta W_i = \iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dV$$

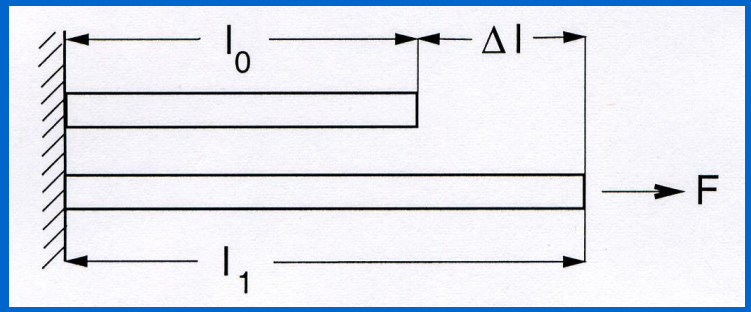
spezifische Formänderungsarbeit

$$\iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{\sigma}\, dV = \iiint_V \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{P} dV + \delta \boldsymbol{U}_{(i)}^T \boldsymbol{F}_{(i)}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen 13

wie kommt man auf die spezifische Formänderungsarbeit ?



$$W = F \cdot \Delta\ell$$

$$F = \sigma \cdot A$$

$$W = \sigma \cdot A \cdot \Delta\ell = \sigma \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} \cdot \ell \cdot A = \varepsilon \cdot \sigma \cdot V \rightarrow W_{spez} = \frac{W}{V}$$

Diese Betrachtung kann man für alle drei Koordinatenachsen anstellen und integrieren, womit dann entsteht:

$$W_{spez} = \frac{W}{V} = \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \, \boldsymbol{\sigma} \, dV \rightarrow \delta W_i = \iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \, \boldsymbol{\sigma} \, dV$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Elementsteifigkeitsmatrizen 14

$$\iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \, \boldsymbol{\sigma} \, dV = \iiint_V \delta\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{P} dV + \delta\boldsymbol{U}_{(i)}^T \boldsymbol{F}_{(i)}$$

wir können wie folgt substituieren mit $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\, \delta\boldsymbol{U}_{(i)} \quad \rightarrow \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{U}_{(i)})^T = \delta\boldsymbol{U}_{(i)}^T \boldsymbol{B}^T$$

$$\delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N}\, \delta\boldsymbol{U}_{(i)} \rightarrow \delta\boldsymbol{U}^T = (\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{U}_{(i)})^T = \delta\boldsymbol{U}_{(i)}^T \boldsymbol{N}^T$$

$$\delta\boldsymbol{U}_{(i)}^T \left(\iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \right) = \delta\boldsymbol{U}_{(i)}^T \left(\iiint_V \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{P} \, dV + \boldsymbol{F}_{(i)} \right)$$

Elementsteifigkeitsmatrizen 15

Da diese Beziehung für jeden beliebigen Wert von $\delta \boldsymbol{U}_{(i)}^{T}$ gelten muß, zeigt ein Faktorenvergleich:

$$\iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV = \iiint_V \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{P}\, dV + \boldsymbol{F}_{(i)} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\varepsilon}\, dV \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{U}_{(i)} \qquad \iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\, dV \cdot \boldsymbol{U}_{(i)}$$

Wenn wir zunächst auf der rechten Seite das Integral der Volumenkräfte weglassen:

$$\iiint_V \boldsymbol{B}^T\ \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\, dV \cdot \boldsymbol{U}_{(i)} = \boldsymbol{F}_{(i)}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{(i)} = \boldsymbol{F}_{(i)}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Materialmatrizen I

$$\boldsymbol{C} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \nu = \text{Querkontraktionszahl}$$

ebener Spannungszustand

$$\boldsymbol{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

axialsymmetrischer Spannungszustand

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Materialmatrizen 2

E Stab

EI Bernoulli-Balken

$$w = -\int \psi \, dx + \int \frac{Q}{GA_S} \equiv w_B + w_S$$

Timoshenko-Balken

$$\boldsymbol{C} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Kirchhoff-Platte

$$\boldsymbol{C}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reissner-Mindlin-Platte

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Materialmatrizen 3

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

räumlicher Spannungs-zustand

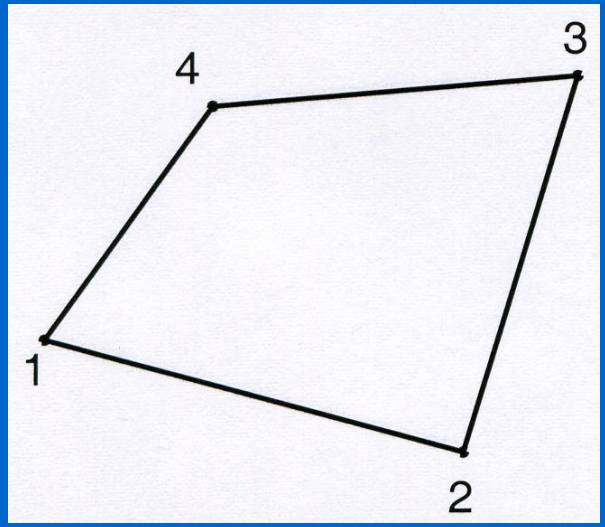
UNIVERSITÄT BAYREUTH

B-Matrix I

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{U}_{(i)} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}$$

Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix = B-Matrix

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$



UNIVERSITÄT BAYREUTH

B-Matrix II

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{vmatrix}$$

| 1.Knoten | 2.Knoten | 3.Knoten | 4.Knoten |

... wer sind die N_i ??

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen I

Die Formfunktionen sind meist Polynome:

$$c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y$$ linear

$$c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot x \cdot y + c_6 \cdot y^2$$ quadratisch

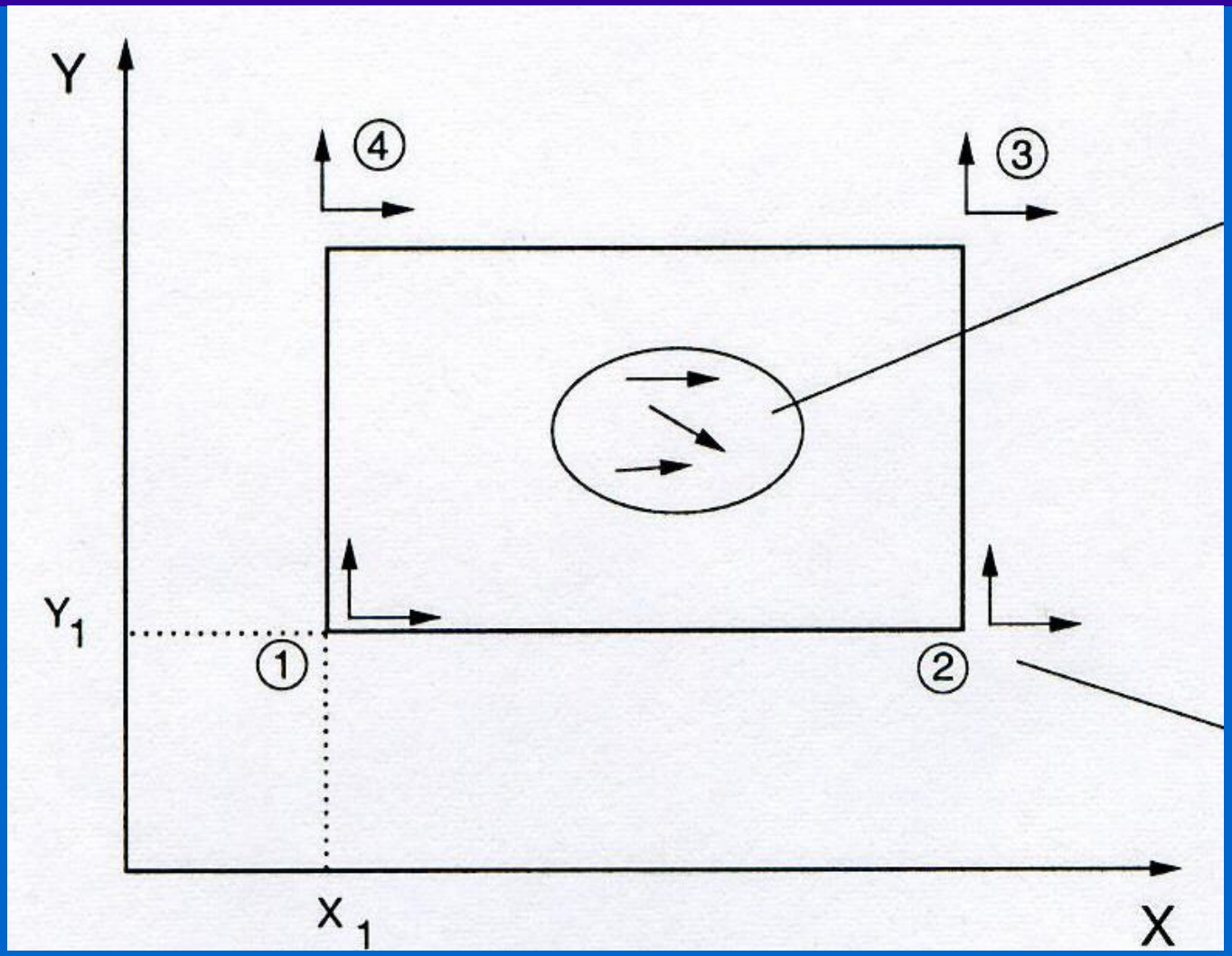
$$c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x \cdot y$$ bilinear

Sie sollen das Verschiebungsfeld $U(x,y)$
in einem Finiten Element durch die Verschiebungen seiner Knoten beschreiben:

$$U(x,y) = \sum_i U_i N_i(x,y)$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen II



$U(x, y)$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen III

am Knoten 1 muß gelten:

$$U(x_1, y_1) = U_1 \cdot N_1(x_1, y_1) + U_2 \cdot N_2(x_1, y_1) + U_3 \cdot N_3(x_1, y_1) + U_4 \cdot N_4(x_1, y_1) = U_1$$

Diese Bedingung ist dann erfüllt, wenn die "eigene" Formfunktion

$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

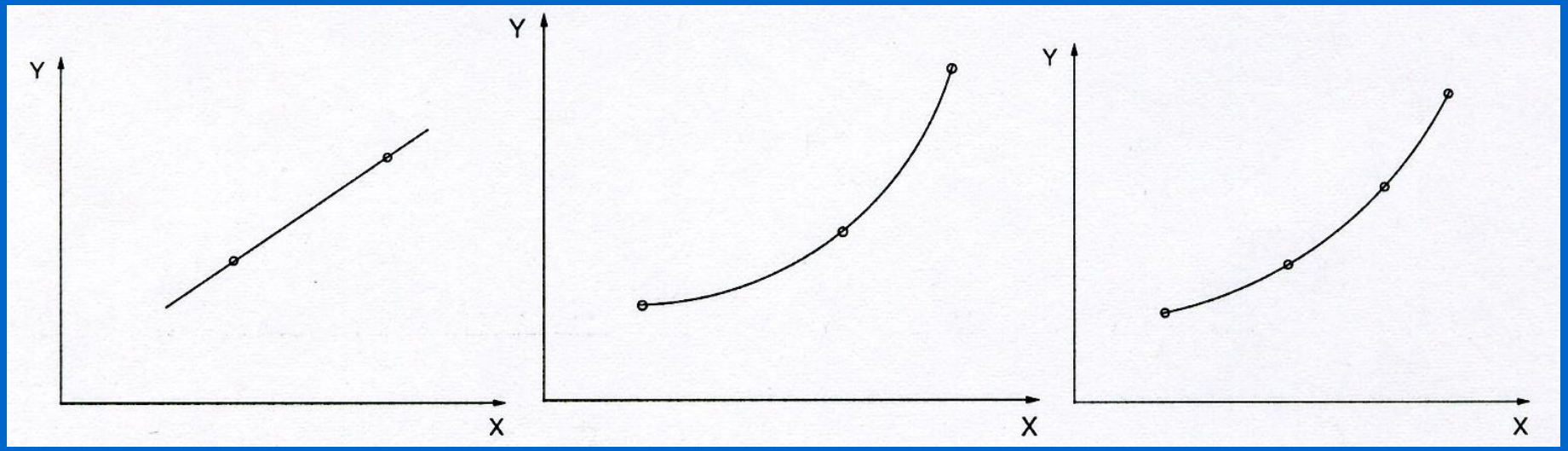
ist und die anderen Formfunktionen $N_2(x_1, y_1)$ bis $N_4(x_1, y_1) = 0$

9. Regel FEA:

Eine Formfunktion N_i hat die Fundamentaleigenschaft, daß sie am Knoten i zu 1 wird und an allen anderen Knoten 0.

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen IV



$$y = c_1 \cdot x + c_2$$

$$[y = a \cdot x + b]$$

„linear“

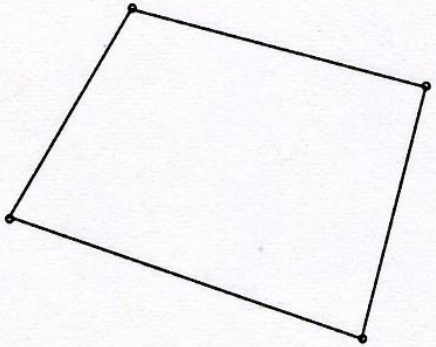
$$y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

„quadratisch“

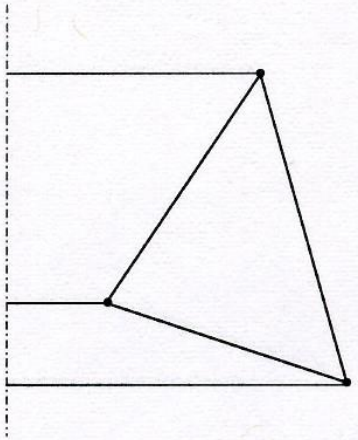
$$y = c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x + c_4$$

„kubisch“

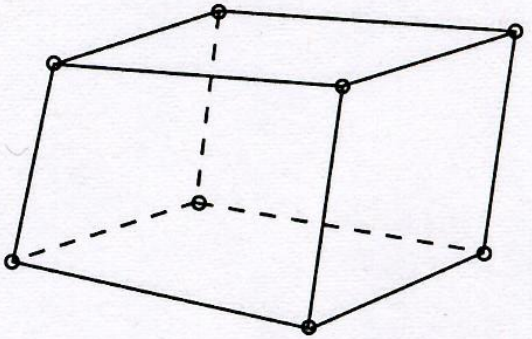
Ansatz- oder Formfunktionen V



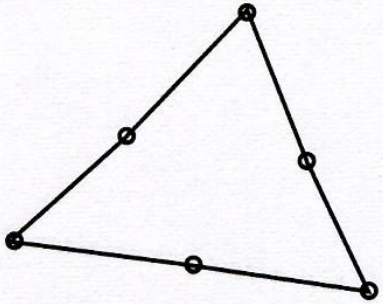
(zu primitiv für Z88)



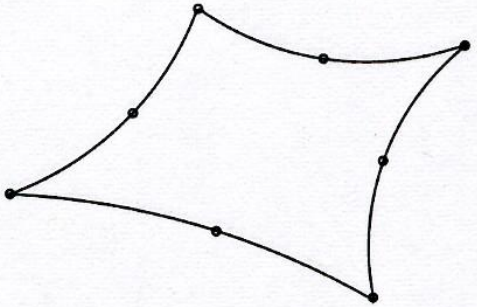
Torus Nr. 6



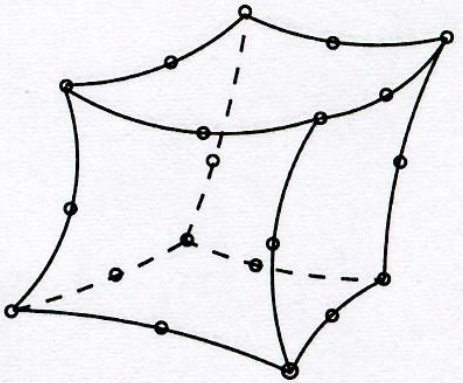
Hexaeder Nr. 1



Scheibe Nr. 3



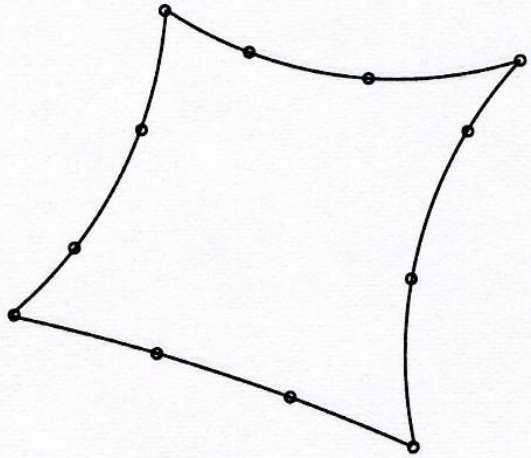
Scheibe Nr. 7



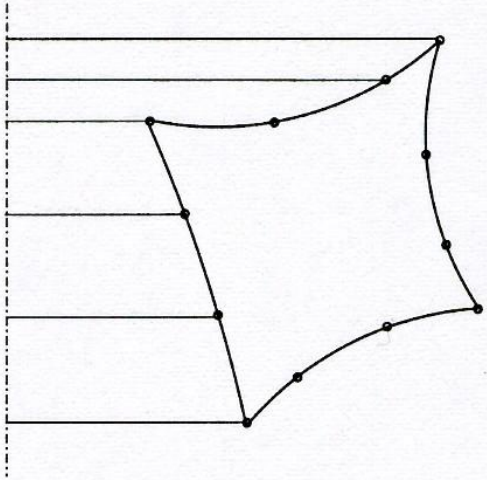
Hexaeder Nr. 10

UNIVERSITÄT BAYREUTH

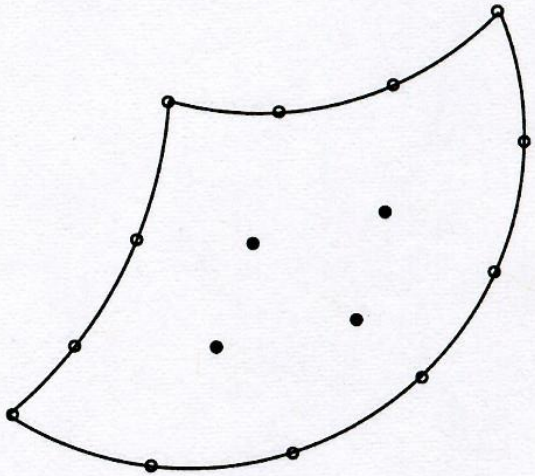
Ansatz- oder Formfunktionen VI



Scheibe Nr. 11



Torus Nr. 12



Platte Nr. 19

Kubische Ansätze sind eigentlich der höchste Polynomgrad bei FEA-Programmen, die mit dem *h*-Verfahren arbeiten.
FEA-Programme, die das *p*-Verfahren nutzen, gehen bis zum 9.Grad (Pro/MECHANICA)

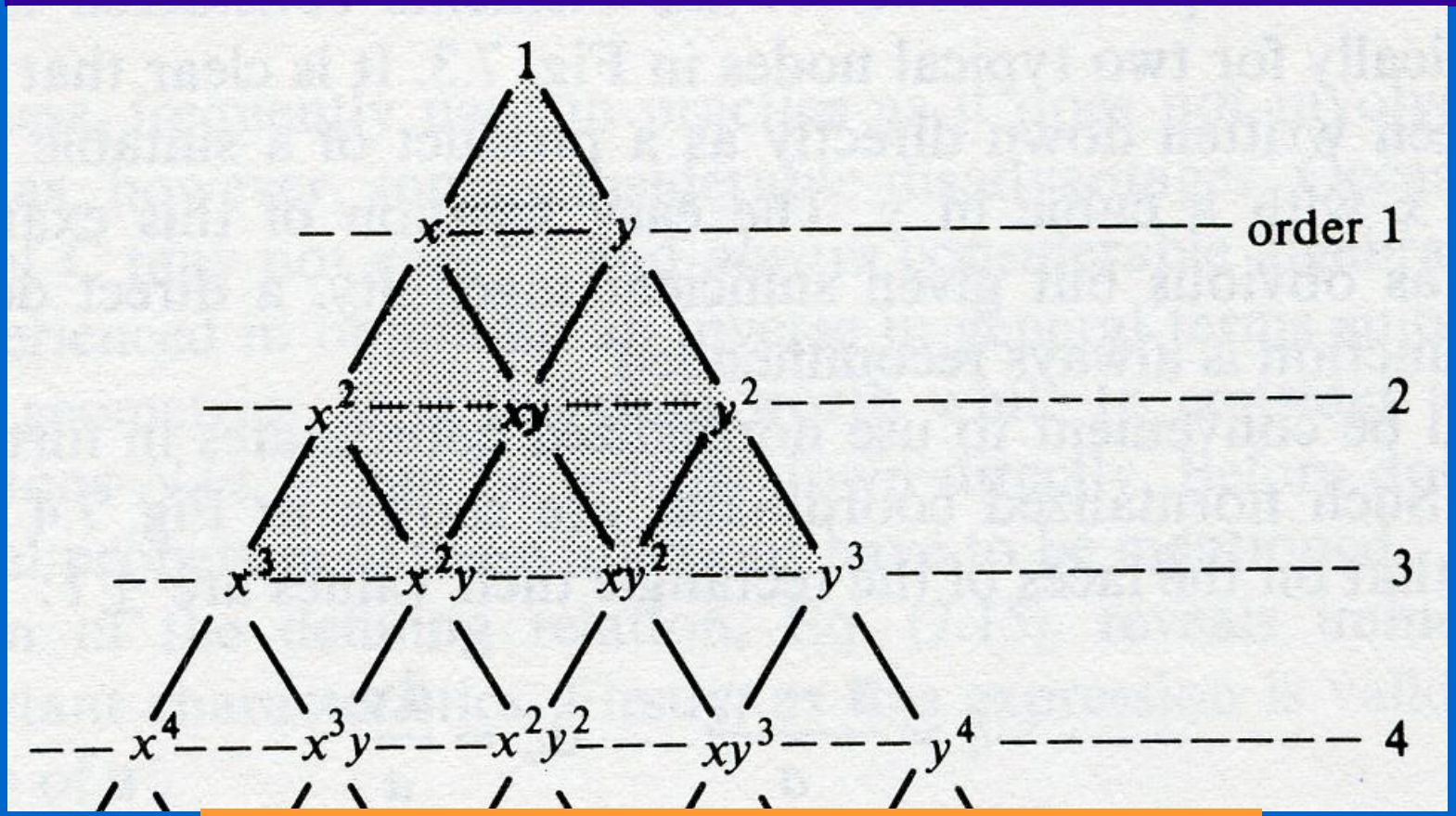
Ansatz- oder Formfunktionen VII

Die genaue Wahl der Formfunktionen (die der Fundamentaleigenschaft genügen müssen) ist Spezialistensache! Es werden teilweise vollständige Polynome, aber auch unvollständige Polynome, aus denen bestimmte Terme gestrichen werden, benutzt. Es spielen Erfahrung, numerische Stabilität und Rechenaufwand eine große Rolle. Hier sollte man keinen großen Ehrgeiz entwickeln und dieses Feld den Mathematikern und den auf FE-Anwendungen spezialisierten Statikern überlassen.

Ein besonderer Elementtyp sind Elemente der *Serendipity-Klasse*. Hierbei werden unvollständige Polynomansätze verwendet, die mathematisch eigentlich eine „Kriminalität“ darstellen. Überraschenderweise arbeiten diese Elemente in der Praxis jedoch ausgezeichnet. Sie sind benannt nach dem Märchen „Die drei Prinzen von Serendip“ eines gewissen Horace Walpole. Diese Prinzen hatten die Eigenschaft, unverhoffte und glückliche Entdeckungen durch Zufall zu machen.

UNIVERSITÄT BAYREUTH

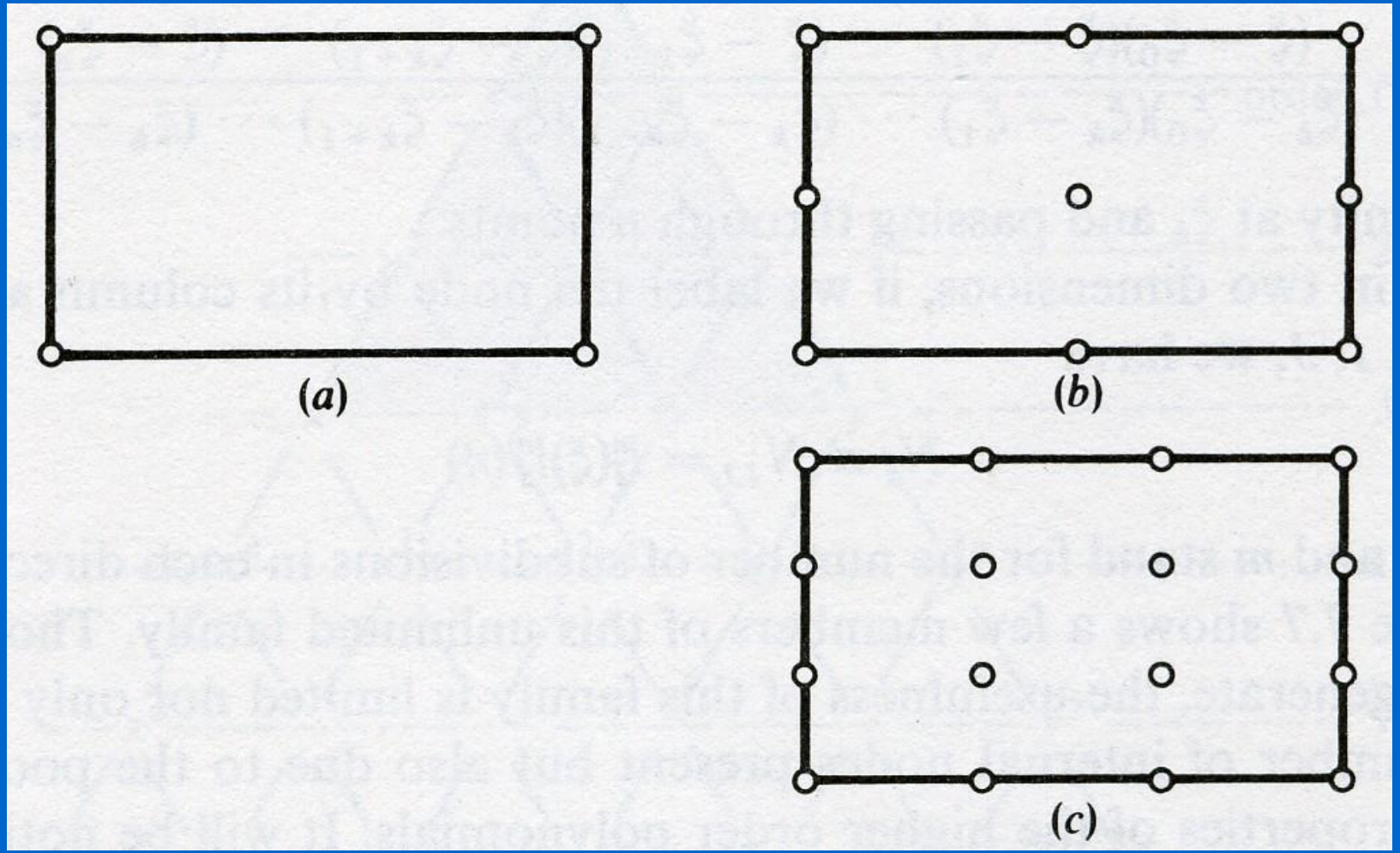
Ansatz- oder Formfunktionen VIII



Pascal'sches Dreieck für die Herleitung von Lagrange-Polynomen

$$y = c_0 \cdot x^2 y^2 + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot y^2 + c_3 \cdot x^2 y + c_4 \cdot y^2 x + c_5 \cdot xy + c_6 \cdot x + c_7 \cdot y + c_8$$

Ansatz- oder Formfunktionen IX

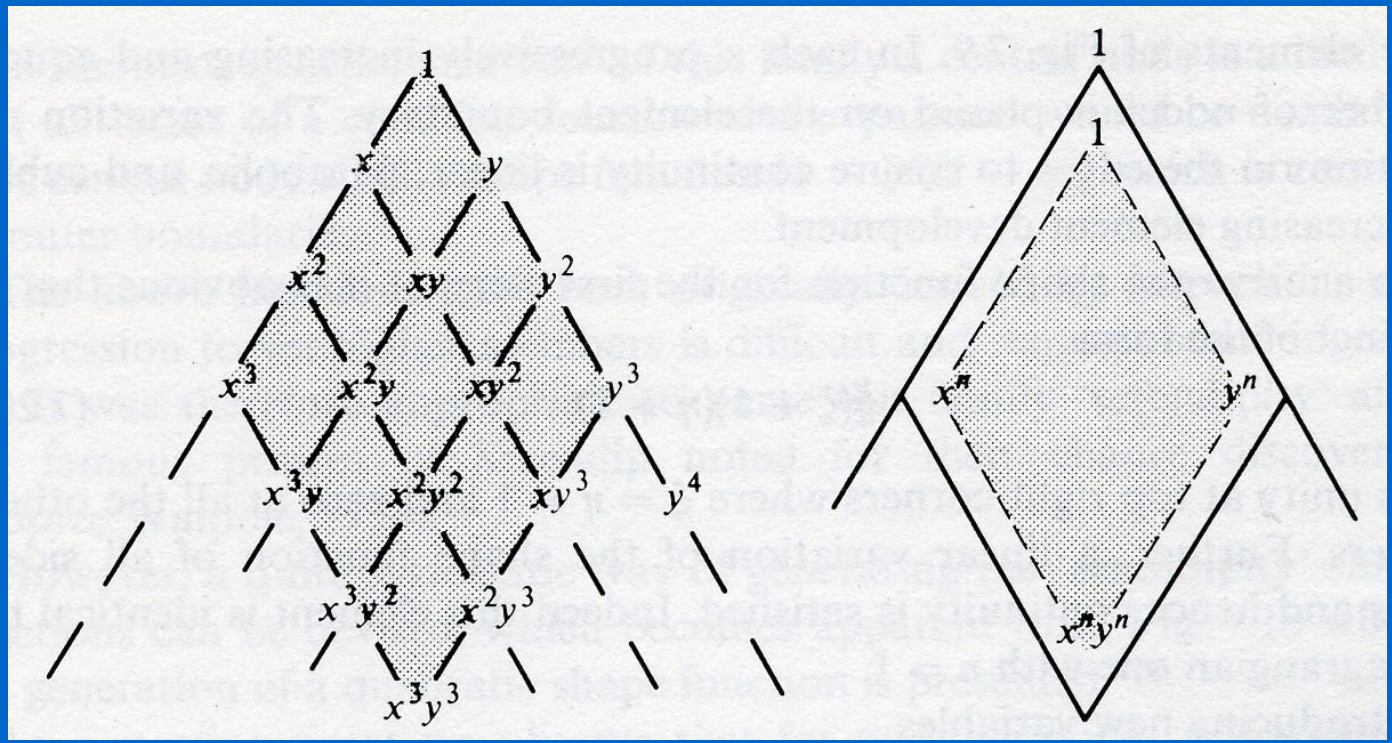


O.C.Zienkiewicz/R.L.Taylor

UNIVERSITÄT BAYREUTH

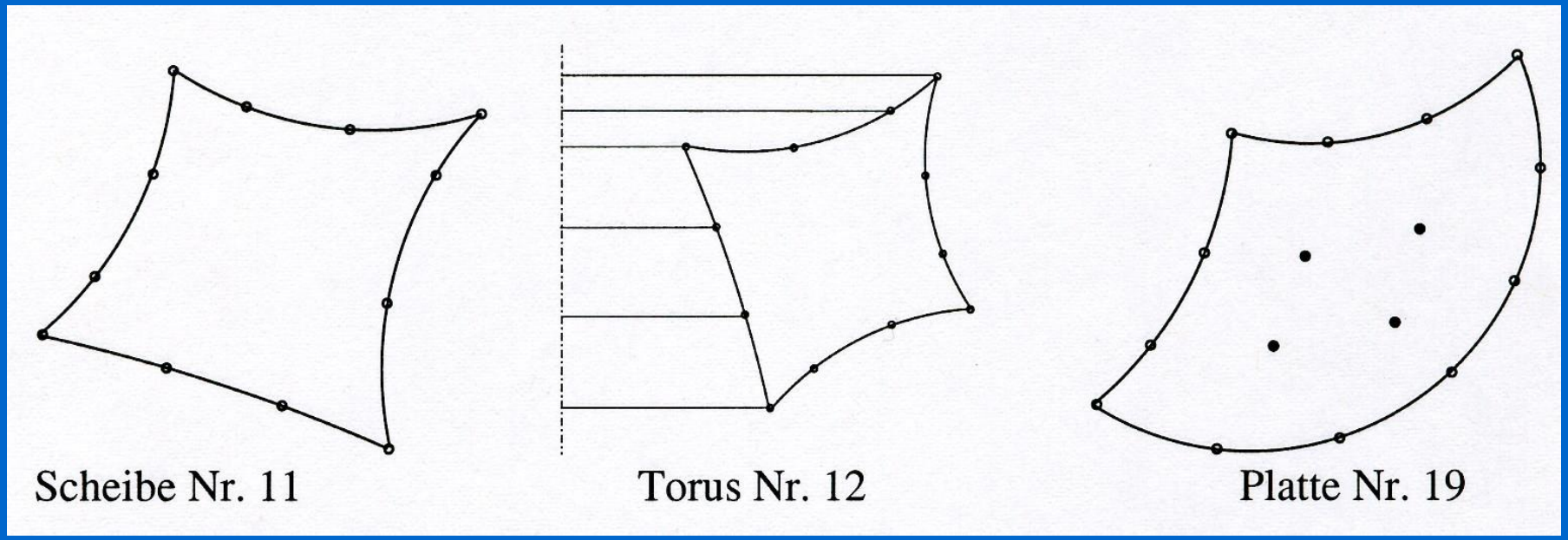
Ansatz- oder Formfunktionen X

$$l_k^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)}$$



O.C.Zienkiewicz/R.L.Taylor

Ansatz- oder Formfunktionen XI



Serendipity | Serendipity | Lagrange

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen XII

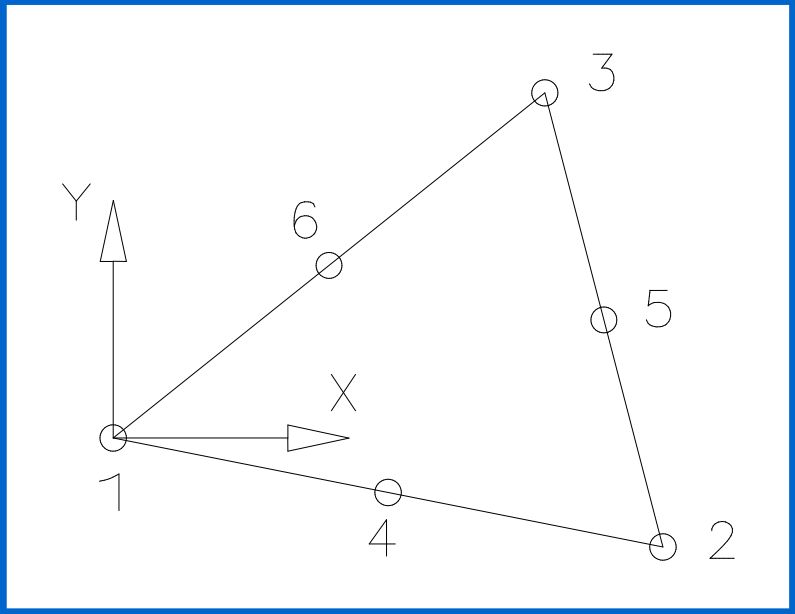
Unterscheide:

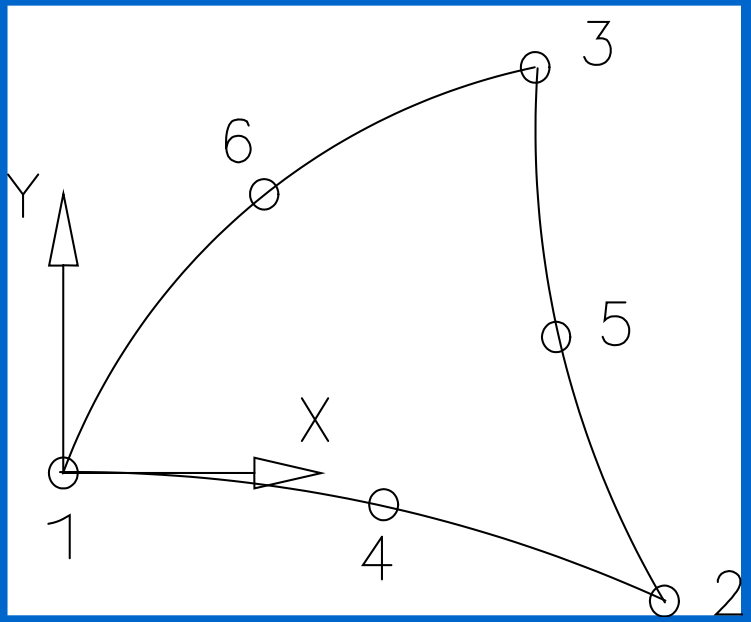
Typ der Ansatzfunktion: Polynom, trigonometrische Funktion ...

Grad der Ansatzfunktion: bei Polynom linear, quadratisch, kubisch...

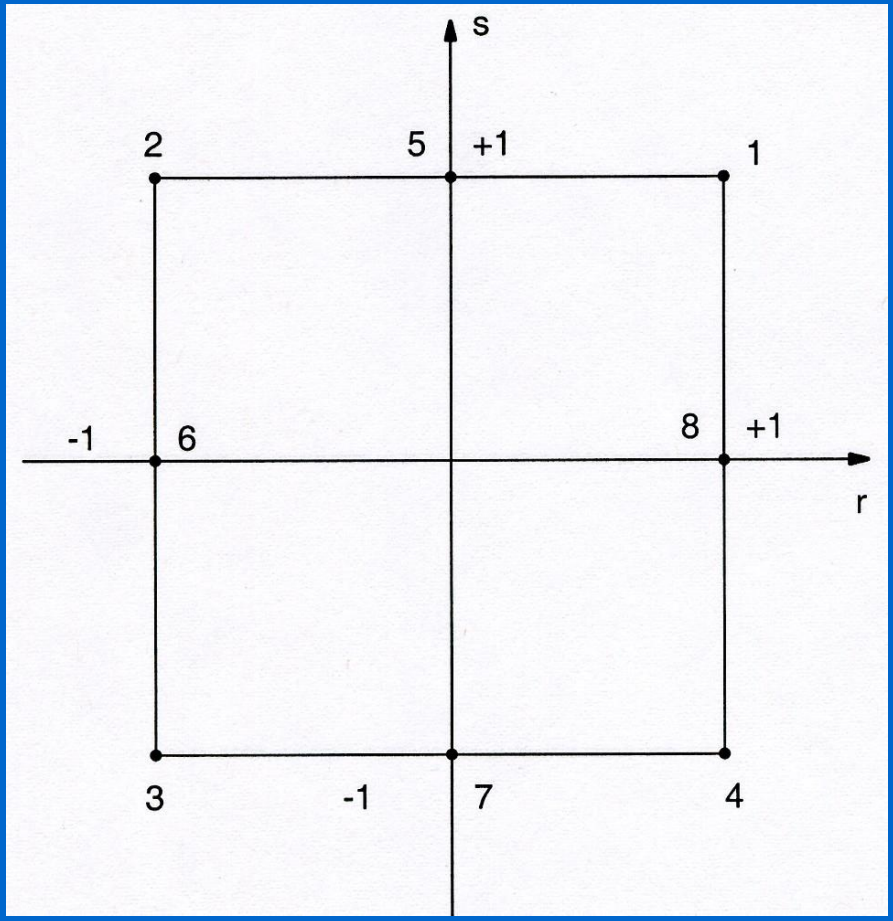
Vollständikeit der Ansatzfunktion: Serendipity, Lagrange

Berandung der Elemente: geradlinig, krummlinig





Ansatz- oder Formfunktionen 13



Beispiel:Serendipity-Element mit quadratischem Ansatz

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)$$

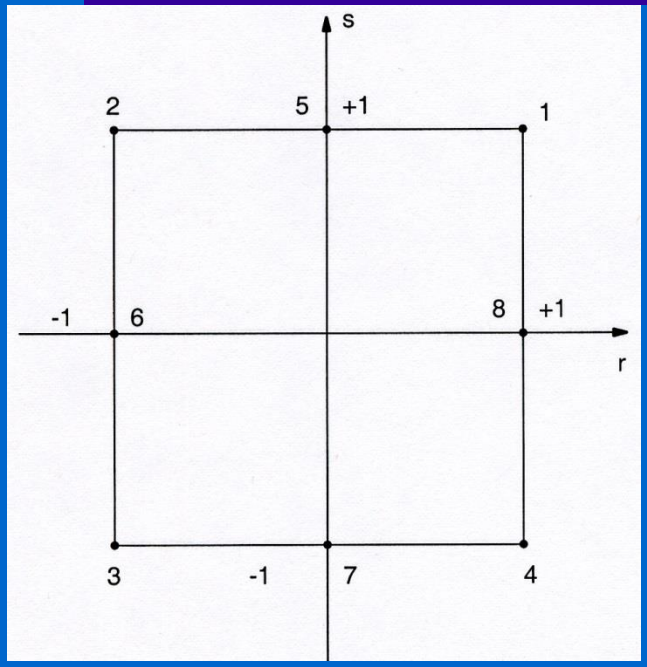
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$$

Ansatz- oder Formfunktionen 14



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)$$

mit $r = 1, s = 1$:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+1)(1+1) - \frac{1}{4}(1-1^2)(1+1) -$$

$$\frac{1}{4}(1-1^2)(1+1) = 1$$

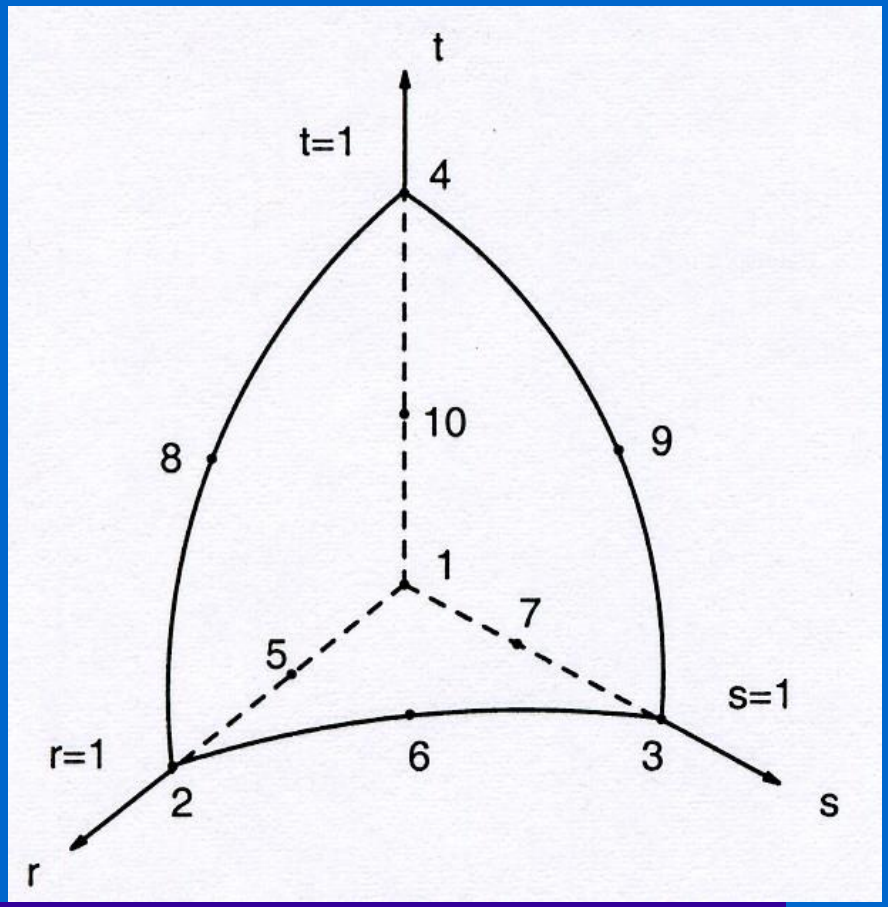
mit $r = -1, s = -1$:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-1)(1-1) - \frac{1}{4}(1-(-1)^2)(1-1) -$$

$$\frac{1}{4}(1-(-1)^2)(1-1) = 0$$

Ansatz- oder Formfunktionen 15

$$H_1 = 2r^2 + 2s^2 + 2t^2 + 4rs + 4rt + 4st - 3r - 3s - 3t + 1$$



$$\frac{\partial H_1}{\partial r} = 4r + 4s + 4t - 3$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial s} = 4s + 4r + 4t - 3$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 4t + 4r + 4s - 3$$

Beispiel:Serendipity-Element mit quadratischem Ansatz

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Ansatz- oder Formfunktionen 16

$$H_2 = 2r^2 - r$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial r} = 4r - 1$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = 0$$

$$H_4 = 2t^2 - t$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial t} = 4t - 1$$

$$H_3 = 2s^2 - s$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial s} = 4s - 1$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} = 0$$

$$H_5 = 4r - 4r^2 - 4rs - 4rt$$

$$\frac{\partial H_5}{\partial r} = 4 - 8r - 4s - 4t$$

$$\frac{\partial H_5}{\partial s} = -4r$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration I

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{Gauß - Legendre}$$

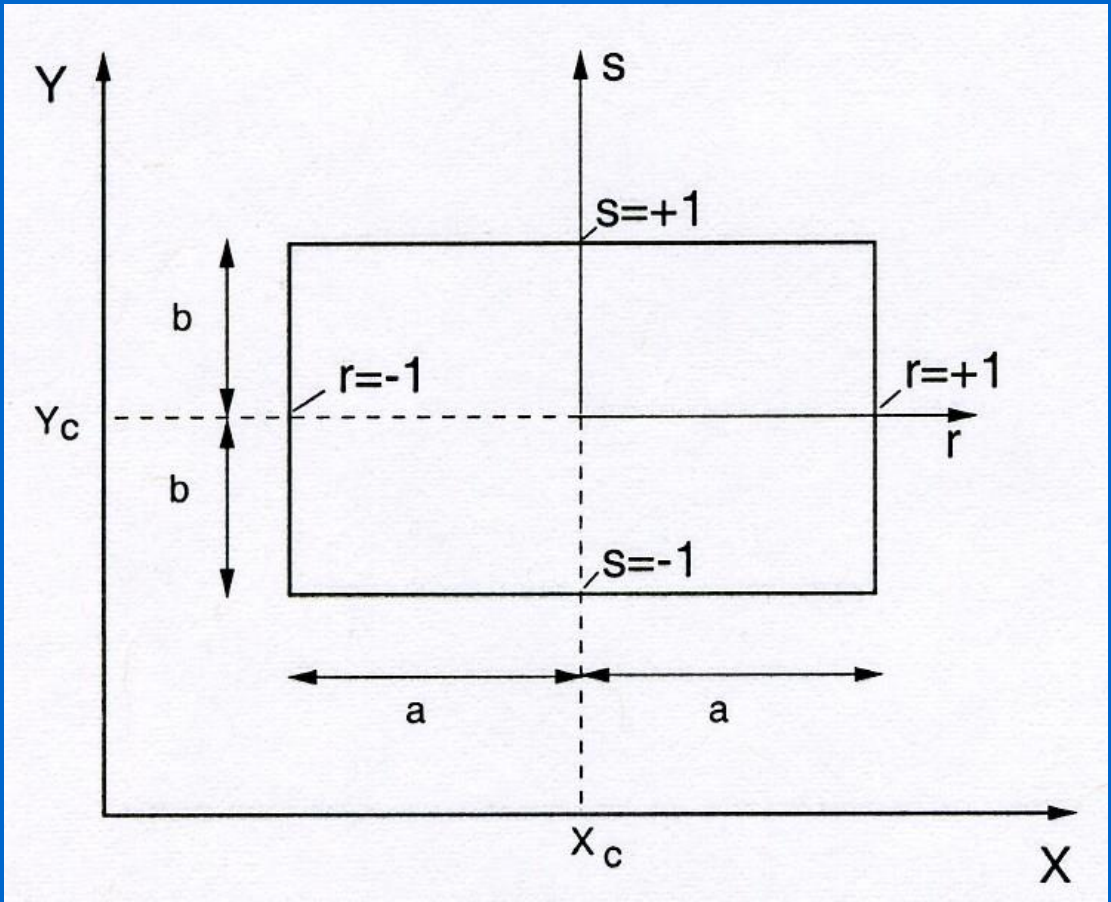
$$\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{Gauß - Laguerre}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{Gauß - Tschebyschew}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)e^{-x^2}dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{Gauß - Hermite}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration II



$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

$$r = (x - x_c)/a$$

$$dr = \frac{dx}{a}$$

$$s = (y - y_c)/b$$

$$ds = \frac{dy}{b}$$

Integration III

$$I = \int_{-1}^{+1} F(r)\,dr = \sum_{1}^{n} \alpha_i \cdot F(r_i)$$

die Gauß-Punkte sind die Nullstellen der Legendre-Polynome

Stützpunkte	Abstände r_i bzw. s_i bzw. t_i	Gauß-Gewichte α_i
1	+0,00000.00000.00000	+2,00000.00000.00000
2	+0,57735.02691.89626	+1,00000.00000.00000
	–0,57735.02691.89626	+1,00000.00000.00000
3	+0,77459.66692.41483	+0,55555.55555.55556
	+0,00000.00000.00000	+0,88888.88888.88889
	–0,77459.66692.41483	+0,55555.55555.55556
4	+0,86113.63115.94053	+0,34785.48451.37454
	+0,33998.10435.84856	+0,65214.51548.62546
	–0,33998.10435.84856	+0,65214.51548.62546
	–0,86113.63115.94053	+0,34785.48451.37454

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration IV

für den ein-,2- und 3-dimensionalen Fall gilt:

$$I = \int_{-1}^{+1} F(r)\,dr = \sum_{1}^{n} \alpha_i \cdot F(r_i)$$

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(r,s)\,dr\,ds = \sum_{i}\sum_{j} \alpha_i\,\alpha_j\,F(r_i,s_j)$$

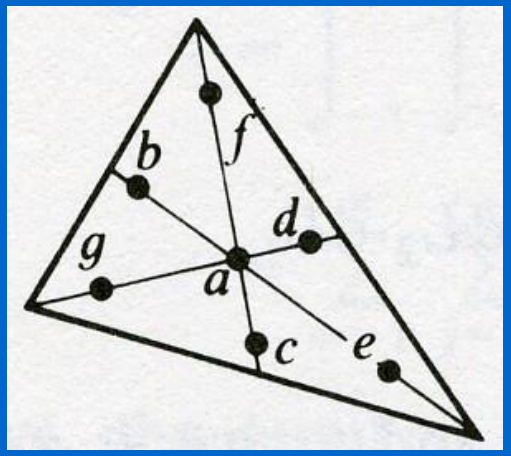
$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} \alpha_i\,\alpha_j\,\alpha_k F(r_i,s_j,t_k)$$

Integration V

für Dreiecke gilt:

$$I = \int_0^{+1}\int_0^{+1} F(r,s)\,dr\,ds =$$

$$\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i F(r_i, s_i)$$



Stützpunkte	r_i	s_i	α_i
3	+0,16666.66666.667	+0,16666.66666.667	+0,33333.33333.333
	+0,66666.66666.667	+0,16666.66666.667	+0,33333.33333.333
	+0,16666.66666.667	+0,66666.66666.667	+0,33333.33333.333
7	+0,10128.65073.235	+0,10128.65073.235	+0,12593.91805.448
	+0,79742.69853.531	+0,10128.65073.235	+0,12593.91805.448
	+0,10128.65073.235	+0,79742.69853.531	+0,12593.91805.448
	+0,47014.20641.051	+0,05971.58717.898	+0,13239.41527.885
	+0,47014.20641.051	+0,47014.20641.051	+0,13239.41527.885
	+0.05971.58717.898	+0,47014.20641.051	+0,13239.41527.885
	+0,33333.33333.333	+0,33333.33333.333	+0,22500.00000.000
13	+0,06513.01029.022	+0,06513.01029.022	+0,05334.72356.088
	+0,86973.97941.956	+0,06513.01029.022	+0,05334.72356.088
	+0,06513.01029.022	+0,86973.97941.956	+0,05334.72356.088
	+0,31286.54960.049	+0,04869.03154.253	+0,07711.37608.903
	+0,63844.41885.698	+0,31286.54960.049	+0,07711.37608.903
	+0,04869.03154.253	+0,63844.41885.698	+0,07711.37608.903
	+0,63844.41885.698	+0,04869.03154.253	+0,07711.37608.903
	+0,31286.54960.049	+0,63844.41885.698	+0,07711.37608.903
	+0,04869.03154.253	+0,31286.54960.049	+0,07711.37608.903

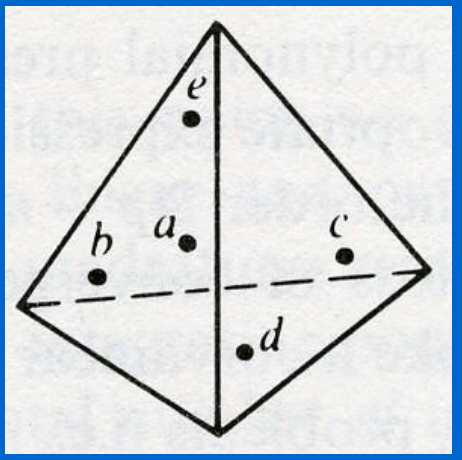
UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration VI

für Tetraeder gilt:

$$I = \int_0^{+1}\int_0^{+1}\int_0^{+1} F(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = \frac{1}{6}\sum_i \alpha_i F(r_i,s_i,t_i)$$

Stützp.	r_i	s_i	t_i	α_i
1	+0,25000.000	+0,25000.000	+0,25000.000	+1,00000.000
4	+0,58541.020	+0,13819.660	+0,13819.660	+0,25000.000
	+0,13819.660	+0,58541.020	+0,13819.660	+0,25000.000
	+0,13819.660	+0,13819.660	+0,58541.020	+0,25000.000
	+0,13819.660	+0,13819.660	+0,13819.660	+0,25000.000
5	+0,25000.000	+0,25000.000	+0,25000.000	–0,80000.000
	+0,50000.000	+0,16666.667	+0,16666.667	+0,45000.000
	+0,16666.667	+0,50000.000	+0,16666.667	+0,45000.000
	+0,16666.667	+0,16666.667	+0,50000.000	+0,45000.000
	+0,16666.667	+0,16666.667	+0,16666.667	+0,45000.000



UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration VII

wir mußten für die Integration in natürlichen Koordinaten r,s,t arbeiten. Wieder auf x,y,z transformieren. Es gilt wie für die Verschiebungen:

$$x = \sum_i N_i x_i$$
$$y = \sum_i N_i y_i$$
$$z = \sum_i N_i z_i$$

$$x = f_1(r,s,t)$$
$$y = f_2(r,s,t)$$
$$z = f_3(r,s,t)$$

für ***B*** brauchen wir die partiellen Ableitungen

$$\partial N_i / \partial x,\ \partial N_i / \partial y \text{ und } \partial N_i / \partial z$$

Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration VIII

Die Kettenregel in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

in symbolischer Form:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \boldsymbol{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

dabei ist ***J*** die sog. Jacobi-Matrix

Integration IX

Die Jacobi-Matrix bildet die Beziehung natürliche Koordinaten – kartesische Koordinaten ab:

$$J = \begin{pmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{pmatrix}$$

Leider brauchen wir wegen ***B*** die inverse Jacobi-Matrix:

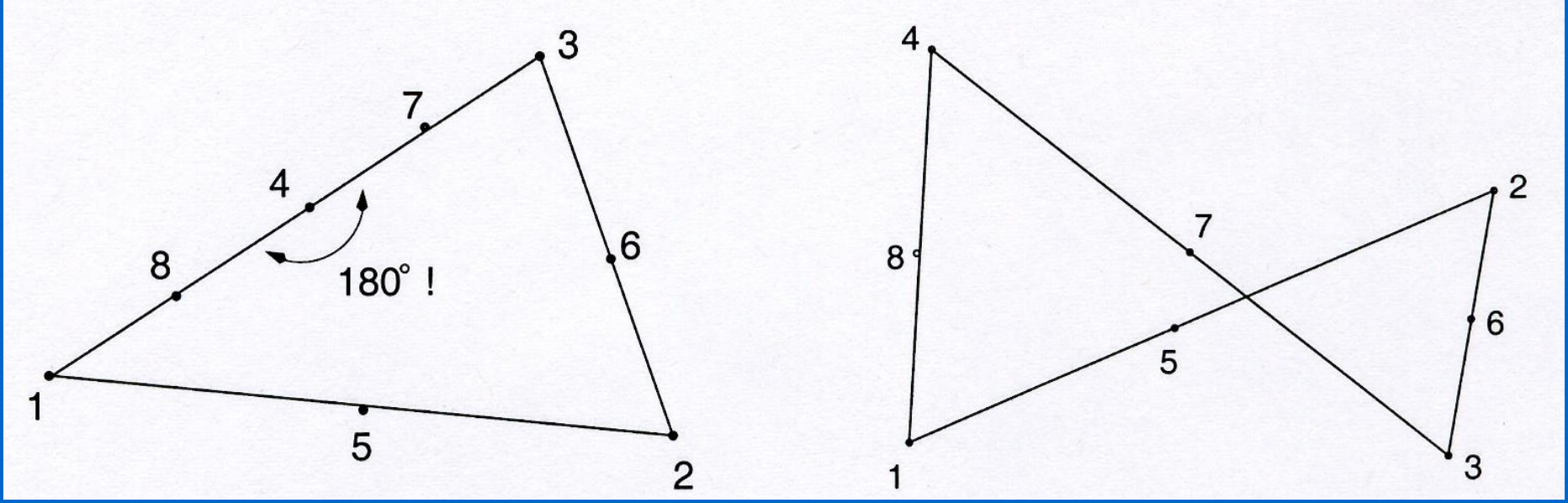
$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\partial N_i / \partial x, \partial N_i / \partial y \text{ und } \partial N_i / \partial z$$

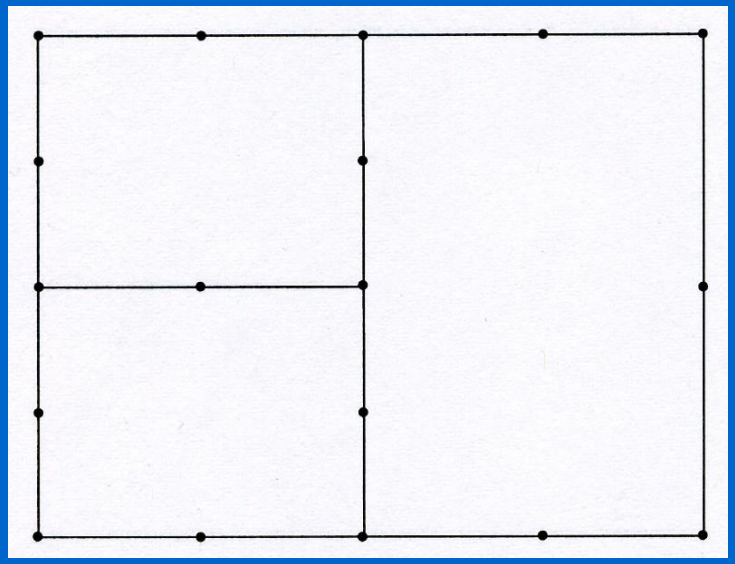
UNIVERSITÄT BAYREUTH

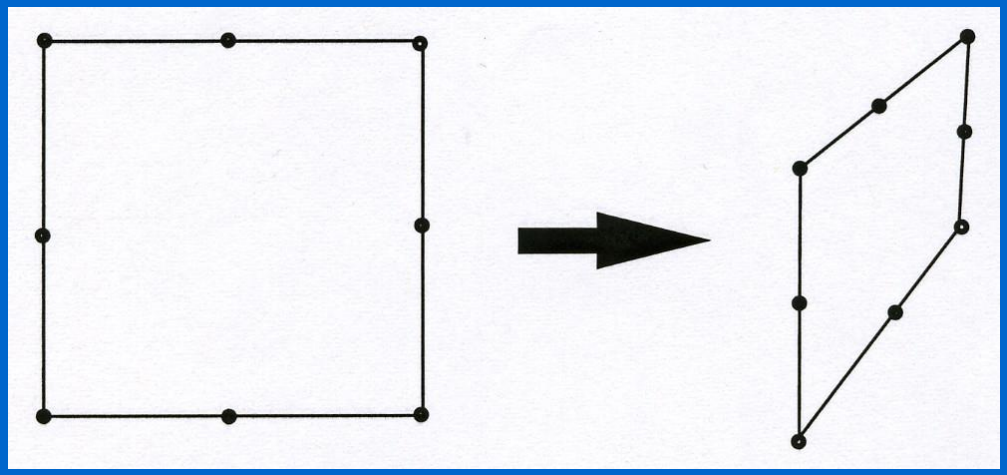
Integration X

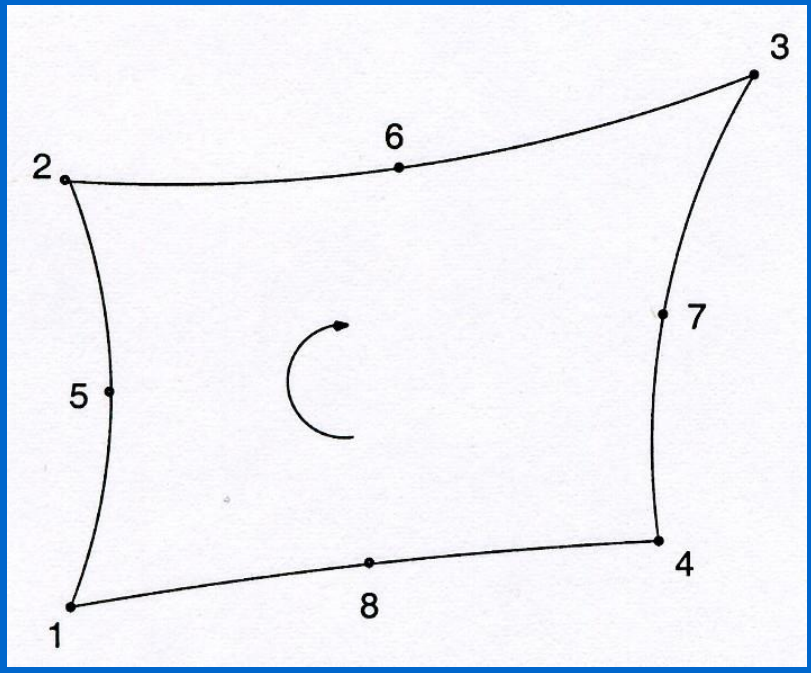
Normalerweise existiert die inverse Jacobi-Matrix, wenn eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den natürlichen und den kartesischen (oder Polar- oder Zylinderkoordinaten) existiert. Wann gibt‘s Stress?



Integration XI







UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration XII

$$K = \iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\, dV$$

B ist Funktion von r,s,t

$$dV = \det \boldsymbol{J}\, dr\, ds\, dt$$

Substitutionsregel für Mehrfachintegrale

Damit wird die Elementsteifigkeitsmatrix für 2-dimensionale Elemente:

$$\boldsymbol{K}^e = \iint_A \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\, dxdy = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{B}^T(r,s)\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}(r,s)\det \boldsymbol{J}(r,s)\, drds \approx$$

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_s} \boldsymbol{B}^T(r_i,s_j)\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}(r_i,s_j)\det \boldsymbol{J}(r_i,s_j)$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Integration 13

Damit wird die Elementsteifigkeitsmatrix für 3-dimensionale Elemente:

$$\boldsymbol{K}^e = \iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\, dxdydz =$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{B}^T(r,s,t)\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}(r,s,t)\det \boldsymbol{J}(r,s,t)\, drdsdt \approx$$

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_s}\sum_{k=1}^{n_k} \boldsymbol{B}^T(r_i,s_j,t_k)\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}(r_i,s_j,t_k)\det \boldsymbol{J}(r_i,s_j,t_k)$$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Aufbringen von Lasten I

Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \iiint_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B}\, dV$$

Massenmatrix

$$\boldsymbol{M} = \iiint_V \boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N}\, dV$$

$$\boldsymbol{R}_B = \iiint_V \boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{f}_B \cdot dV$$

Volumenkräfte

$$\boldsymbol{R}_S = \iint_S \boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{q} \cdot dS$$

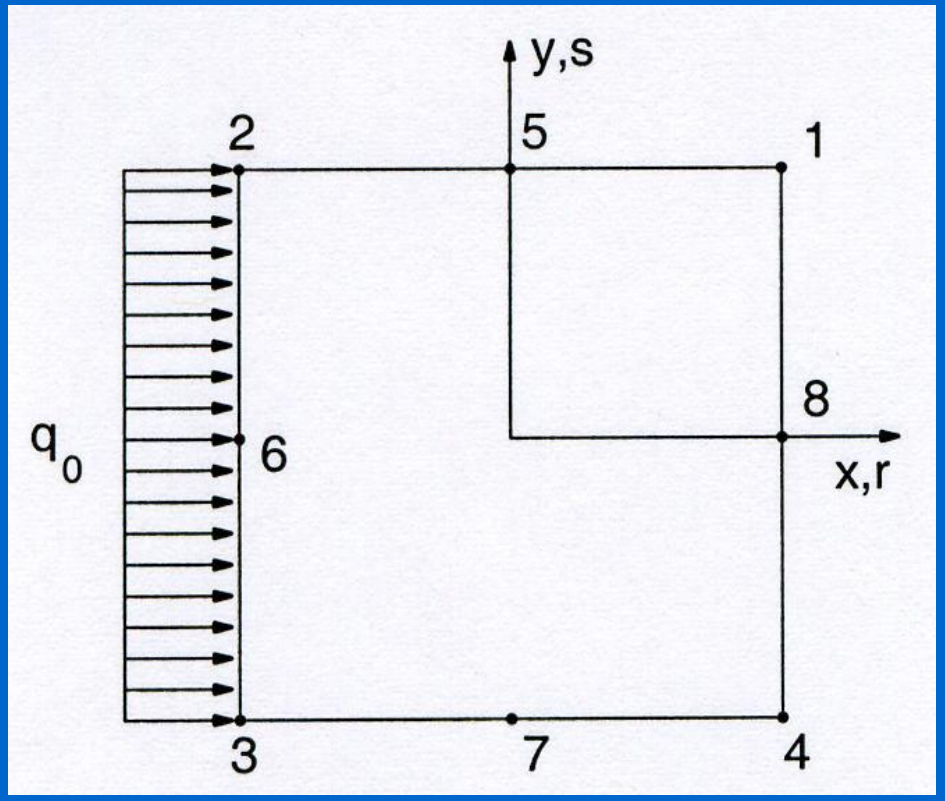
Oberflächenkräfte

$$\boldsymbol{R}_I = \iiint_V \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_I \cdot dV$$

Anfangsspannungen

Aufbringen von Lasten II

$$\boldsymbol{R}_S = \iint_S \boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{q}\, dS = \iint_S \boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{q} \cdot dx\, dy$$



$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

Streckenlasten

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

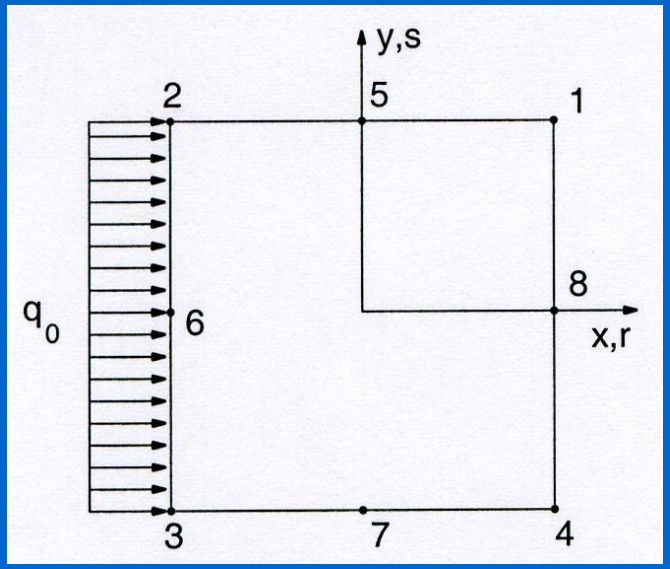
$q_0 = \text{const.}$

$x = r \quad \text{und} \quad y = s$

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Aufbringen von Lasten III

$$\boldsymbol{R}_S = \boldsymbol{q} \iint_A \boldsymbol{N}^T \, dx\, dy$$



hier:

$$dxdy = drds$$

$$\boldsymbol{R}_S = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^T dxdy$$

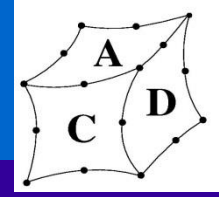
Aufbringen von Lasten IV

Die Formfunktionen für die Knoten 2, 3 und 6:

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$$

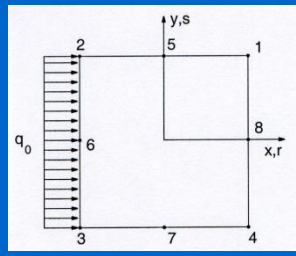


Aufbringen von Lasten V

Die Lastkomponente für den Knoten 2 wird:

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y) - \frac{1}{4}(1-x^2)(1+y) - \frac{1}{4}(1-y^2)(1-x)$$

$x = -1$ ⇒ $N_2 = \frac{1}{2}(y + y^2)$



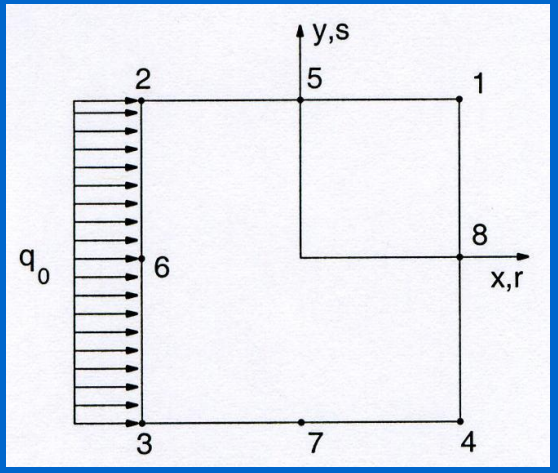
$$F_2 = q_0 \int_{-1}^{+1} N_2 \, dy = q_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (y + y^2) \, dy =$$

$$= q_0 \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = q_0 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) = q_0 \frac{1}{3}$$

Aufbringen von Lasten VI

Die Lastkomponente für den Knoten 6 wird:

$$N_6 = \frac{1}{2}\left(1-y^2\right)(1-x)$$



$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad N_6 = 1-y^2$$

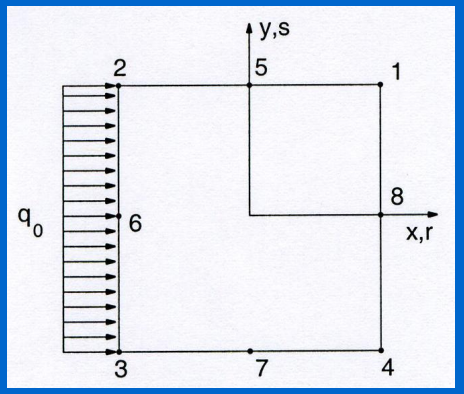
$$F_6 = q_0 \int_{-1}^{+1} N_6 \, dy = q_0 \int_{-1}^{+1} (1-y^2)\, dy =$$

$$= q_0 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = q_0 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = q_0 \frac{4}{3}$$

Aufbringen von Lasten VII

Die Lastkomponente für den Knoten 3 wird:

$$F_3 = q_0 \frac{1}{3}$$



Die Seitenlänge ist 2, weil von -1 bis +1, also:

$$q_0 \cdot \frac{1}{3} : 2 = \underline{\underline{q_0 \cdot \frac{1}{6} = F_2}}$$

↑ Lastkomponente am Knoten 2

$$q_0 \cdot \frac{1}{3} : 2 = \underline{\underline{q_0 \cdot \frac{1}{6} = F_3}}$$

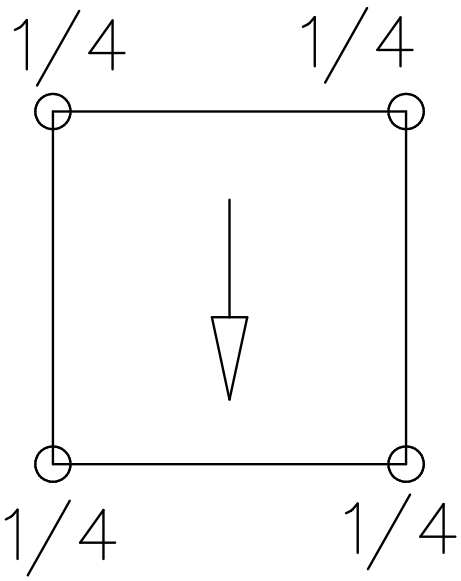
↑ Lastkomponente am Knoten 3

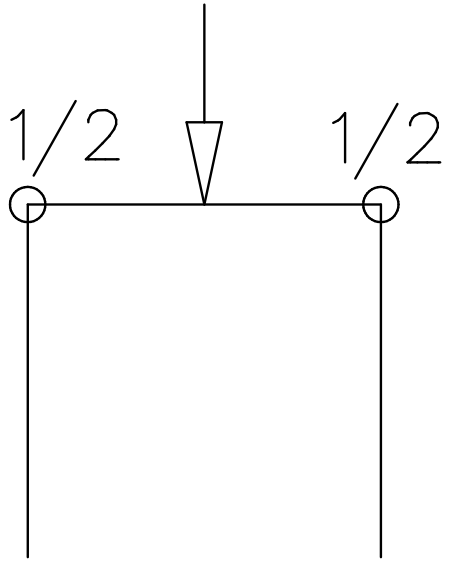
$$q_0 \cdot \frac{4}{3} : 2 = \underline{\underline{q_0 \cdot \frac{2}{3} = F_6}}$$

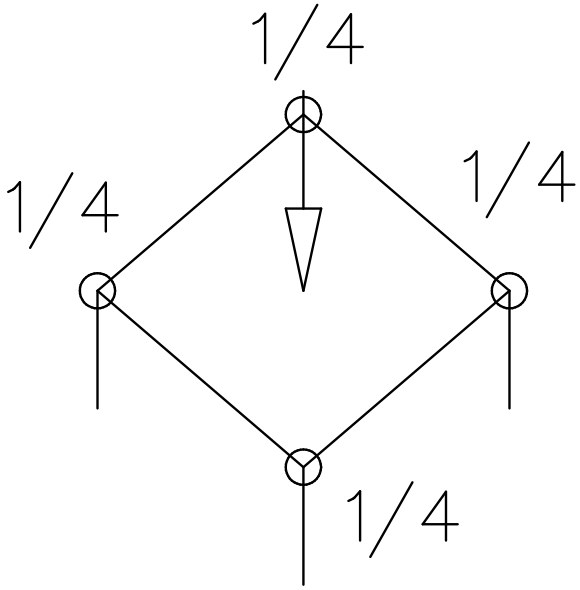
← Lastkomponente am Knoten 6

Aufbringen von Lasten VIII

Elemente mit linearem Ansatz



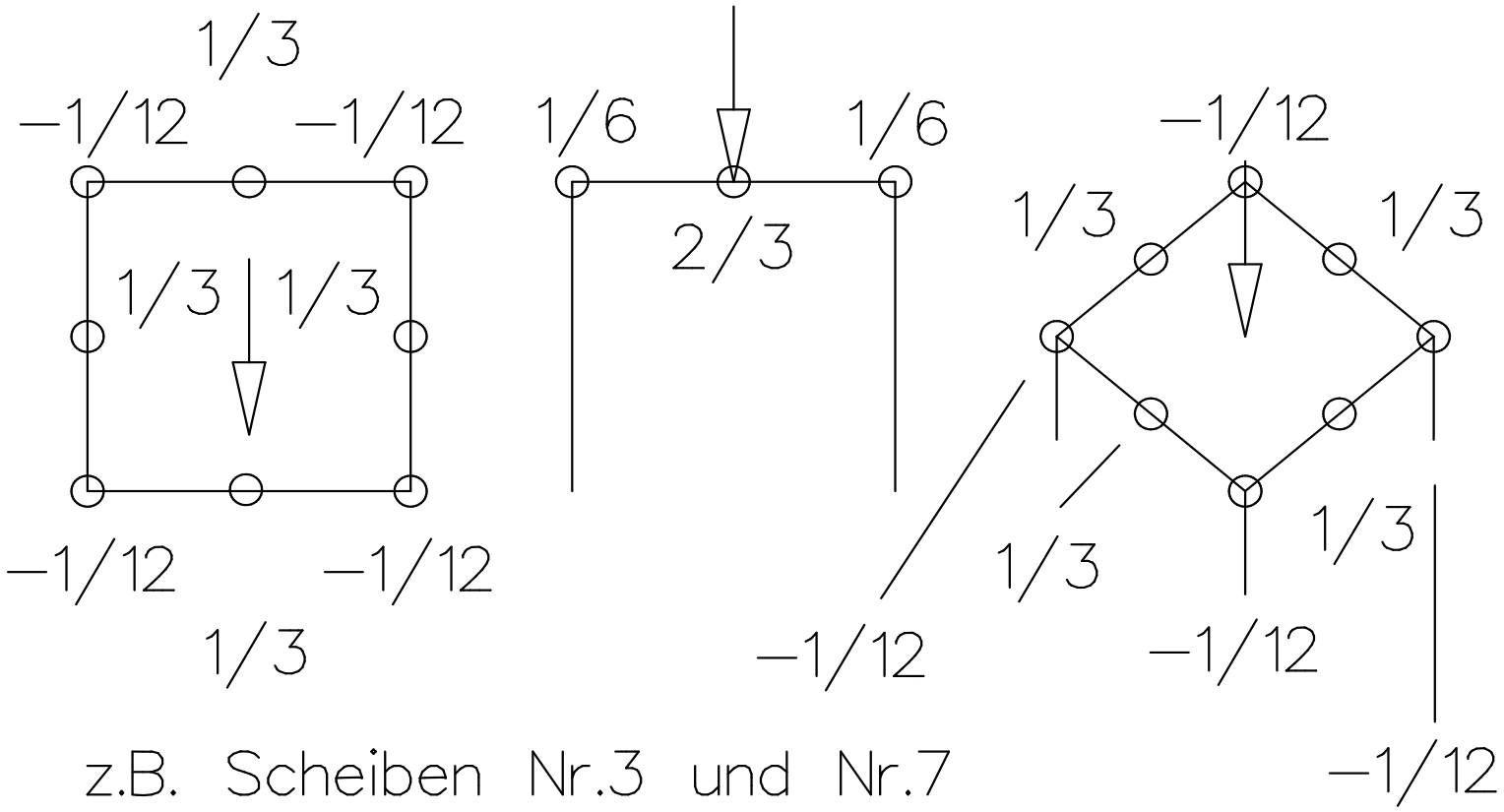




z.B. Hexaeder Nr.1

Aufbringen von Lasten IX

Elemente mit quadratischem Ansatz

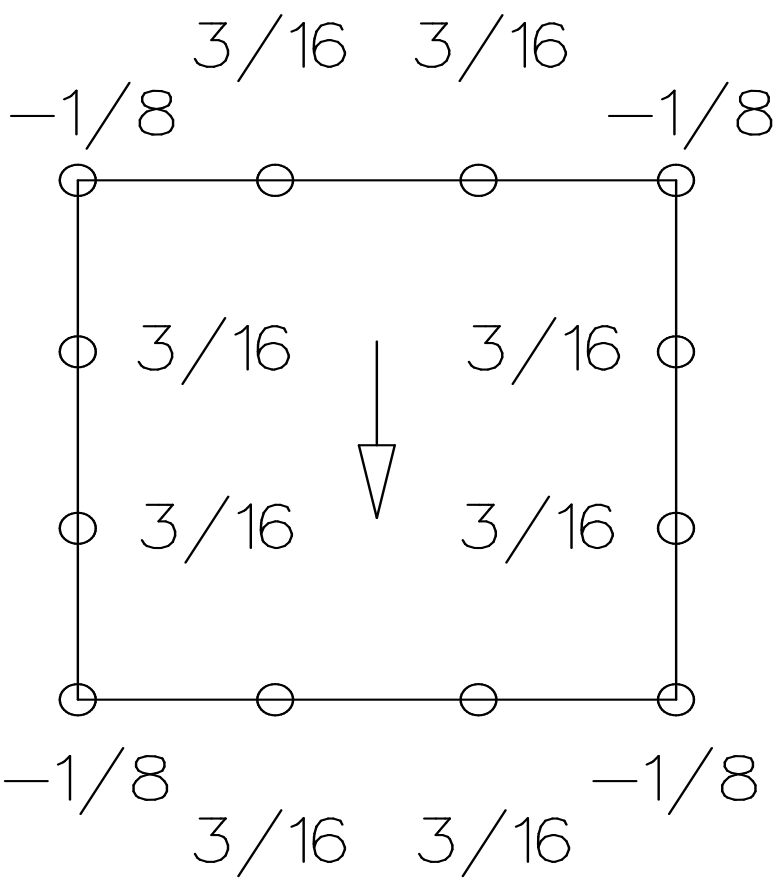


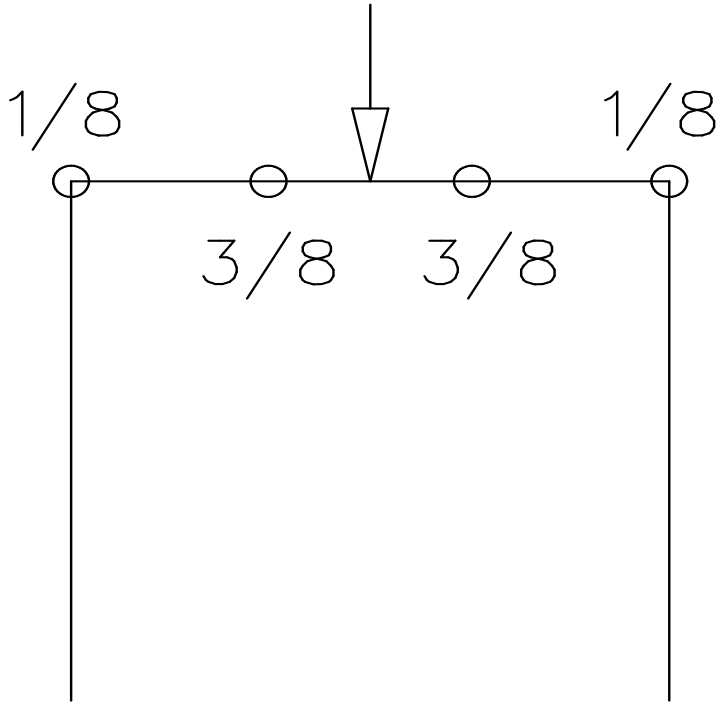
z.B. Scheiben Nr.3 und Nr.7
Torus Nr.8, Hexaeder Nr.10

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Aufbringen von Lasten X

Elemente mit kubischem Ansatz





z.B. Scheibe Nr.11
Torus Nr.12